UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

INTRODUCTION AU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

BENOIT CHARBONNEAU

SEPTEMBRE 1999

Remerciements

Dans ma pré-vie mathématique, j'ai rêvé d'être chef cuisinier, puis acteur, puis je ne m'en souviens plus, puis chimiste. En 1993, j'ai rencontré Fernand Beaudet, celui qui changera ces chimères en un rêve bien plus solide. C'est son initiative de tenir un petit cours clandestin d'analyse à l'été 1994, après ma première année de cégep, qui me permit d'apprécier à sa juste valeur un futur en mathématiques.

Sous sa direction, le cégep de Saint-Hyacinthe fut l'hôte du 37e congrès de l'AMQ au début octobre 1994. Ma naissance mathématique remonte précisément au 3 octobre 1994. C'est cette journée là que je décidai que je ferais des maths dans la vie.

En 1995, suivant les conseils de Fernand, j'entrais à l'UQÀM pour n'en resortir qu'en 1999 avec pleins de rêves, plein d'idées, de beaux souvenir, de belles connaissances et ce mémoire. Mon enfance mathématique n'est pas terminée mais un pas important vient d'être franchi. Un certain nombre d'individus auront contribué à paver la route qui m'amène jusqu'ici, j'aimerais maintenant dire quelques mots pour les remercier.

Avant de remercier les nombreux paveurs mathématiques, laissez-moi remercier mes vrais parents, Alfred (Charbonneau, évidemment) et Thérèse (Rajotte, Charbonneau ça sonne pas bien), qui ont su accepter que leur fils ait une vie universitaire si active. Je leur dois beaucoup, pas seulement la vie, et mes absences du foyer familial ne témoignent pas vraiment mon amour pour eux. Cette dernière remarque s'applique également à mes deux soeurs chéries Josiane et Mélanie. Merci aussi à Anne-Marie Fournier avec qui j'ai partagé la dernière année pour avoir accepté mes horaires singuliers et pour m'avoir fait passer de bons moments.

Paul Libbrecht-Gourdet et François Bergeron furent mes mentors TeX. Sans leurs précieux conseils, je n'aurais pas pu écrire ces remerciements aujourd'hui. Merci.

Je tiens aussi à remercier François Bergeron pour toutes les belles histoires de mathématiques qu'il m'a raconté aux cours de ces dernières années et pour toutes les discussions sur l'enseignement que j'ai pu avoir avec lui.

Faire un bac, ce n'est pas seulement faire 30 cours. Faire une maîtrise, ce n'est pas seulement faire 6 cours et un mémoire. C'est beaucoup plus que ça. Chaque discussion, chaque conférence, chaque moment de réflexion forme l'esprit du mathématicien. J'ai beaucoup appris à travers les discussions mathématiques avec mes collègues étudiants Michel Bousquet, Yannick Delbecque, Françis Gascon, Paul Libbrecht-Gourdet, Martin Pinsonnault et Anne-Marie Roy-Boulard. Merci à mes grands frères et à ma grande soeur mathématiques pour avoir partagé leur adolescence mathématique avec moi.

Il n'y a pas qu'avec les étudiants qu'on discute en 4 ans et j'aimerais remercier maintenant les adultes mathématiques qui ont le plus influencé ma vision du monde mathématique. En ordre LEX, il s'agit de Manzoor Ahmad, Fernand Beaudet, François Bergeron, Pierre Bouchard, Steven Boyer, Chantal David, François Lalonde, Jacques Lefebvre.

Un esprit ne saurait être bien formé s'il ne sait faire que des maths. Pour toute autre nourriture intellectuelle, j'aimerais remercier Geneviève Falardeau, Alexandra Haedrich, Jeanne Laporte-Jobin, Ivan Maffezzini, Pierre Poissant-Marquis et Stéphane Tessier.

On ne peut arriver à faire un mémoire en un an sans un minimum de concentration, minimum que je n'avais pas pendant mon bac. Merci à mon entraîneur Yvon Cournoyer pour ses judicieux conseils et encouragements.

Pour leurs encouragements continuels, leur belle amitié et la confiance qu'elles placèrent en moi, un gros merci va directement aux Marie-Claude Côté, Jeanne Laporte-Jobin et Anne-Marie Roy-Boulard.

Pour leur travail impeccable qui simplifie tellement la vie des gens du département, en particulier ma vie, merci à Manon Gauthier et Jeanne Laporte-Jobin. Merci aussi à Alexandra Haedrich pour les nombreux services rendus.

Sans le soutien financier de certains mécènes, je n'aurais su, au cours des dernières années, apprendre autant. Merci donc à François Bergeron et François Lalonde ainsi qu'à la Fondation UQAM, au SPUQ, au LACIM et au CRSNG. Qui sait? Sans ce précieux argent j'aurais peut-être dû cueillir du poulet tous les étés.

Certains remerciements se doivent d'être fait avec multiplicité. J'aimerais donc exprimer toute ma gratitude aux tuteurs de cette maîtrise, mes directeurs Pierre Bouchard et François Lalonde. Je suis également très reconnaissant envers Steven Boyer et Christophe Reutenauer qui ont accepté d'évaluer ce mémoire. Vous êtes des idéaux à atteindre. La lutte sera longue mais je suis patient.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous étudions le théorème de Riemann-Roch pour les courbes algébriques dans sa formulation des années 1950.

Le premier chapitre se compose de préliminaires à ce mémoire: analyse complexe, surfaces de Riemann, formes différentielles, intégration et suites exactes sont au rendez-vous. Ce chapitre se veut un chapitre d'accueil et ne veut en aucune façon constituer un premier cours d'analyse complexe ou de topologie. Ainsi, on n'y retrouve pas la plupart du temps la preuve de ce qu'on y mentionne.

Dans le deuxième chapitre, le lecteur trouvera une présentation complète des notions de base de cohomologie des faisceaux, plus précisément de cohomologie de Čech. Divers groupes de cohomologie sont calculés. Les résultats principaux de ce chapitre sont sans doute l'existence d'une longue suite exacte de groupes de cohomologie et le théorème de Leray qui nous permettent de calculer plus facilement la cohomologie de certains faisceaux.

Le troisième chapitre présente le théorème de Riemann-Roch. Ce théorème lie la dimension d'un espace vectoriel L_D de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann au genre de la surface et au degré du diviseur D. Ce diviseur impose des restrictions sur les fonctions admises dans L_D.

Le quatrième chapitre expose la notion de fibrés en droites holomorphes sur une surface de Riemann. Le lien avec le théorème de Riemann-Roch y est expliqué.

Le cinquième et dernier chapitre esquisse comment on peut utiliser le théorème de Riemann-Roch pour décrire sous une forme privilégiée, appellée forme de Weierstrass, une courbe elliptique qui n'est en fait qu'une surface de Riemann de genre 1. Pour y arriver, nous présentons brièvement le théorème de dualité de Serre qui nous permet de calculer sans trop se casser la tête. Ce chapitre se veut un chapitre d'envoi qui, espérons-le, donnera le goût au lecteur d'en apprendre davantage sur le merveilleux théorème de Riemann-Roch et ses nombreuses apparitions dans presque tous les domaines des mathématiques modernes.

Dans ce mémoire, le genre d'une surface de Riemann est la dimension du 1^{er} groupe de cohomologie de notre surface à coefficients dans le faisceau des fonctions holomorphes. Pour les lecteurs qui ont toujours cru qu'il s'agissait du nombre de trous, nous brossons en appendice un tableau présentant l'équivalence des définitions.

MOTS-CLEFS: Riemann-Roch, cohomologie de Čech, faisceaux, surface de Riemann

INTRODUCTION

Le lecteur est prié de goûter à cette introduction avec sagesse. Il ne doit pas s'attendre à en digérer le contenu d'un seul coup et doit être réceptif à l'idée de n'en découvrir que la saveur. Il restera ensuite suffisamment de pages à ce mémoire pour la digestion.

Une surface de Riemann est un espace topologique localement homéomorphe au plan complexe via ce qu'on appelle des cartes. Lorsque deux cartes s'entrecoupent, on veut que les changements de cartes soient holomorphes. Un diviseur sur une surface de Riemann X est une combinaison linéaire formelle de points

$$D = \sum_{p \in X} D(p)p$$

à coefficients entiers localement finie, c'est-à-dire telle que tout compact $K \subset X$ ne contient qu'un nombre fini de points p tels que $D(p) \neq 0$. Si f est une fonction méromorphe $X \to \mathbb{C}$, on note $\mathfrak{D}(f)$ le diviseur qui contient l'information sur l'ordre des zéros et des pôles de f. On dira que deux diviseurs D et D' sont équivalents si $D' - D = \mathfrak{D}(f)$ pour une fonction méromorphe f sur X. Un problème qui intéressait Bernhard Riemann (1826-1866) était de trouver tous les diviseurs positifs équivalents à un diviseur D sur une surface compacte. Pour y arriver, il cherchait à calculer la dimension de l'espace vectoriel complexe

$$L(D) = \{f \mid f \text{ méromorphe sur } X \text{ et } \mathfrak{D}(f) + D \geq 0\},$$

la relation $\geq$ se vérifiant point par point. Riemann prouva que, pour X compact,

$$\dim L(D) \geq \deg(D) + 1 - g$$

où g est le genre de la surface X et $\deg(D) = \sum D(p)$. Son étudiant Gustav Roch (1839-1866) compléta le théorème qu'on nomme maintenant le théorème de Riemann-Roch pour les courbes algébriques:

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

où K est un certain diviseur appelé diviseur canonique.

À la suite de Riemann et Roch, plusieurs géomètres tentèrent de généraliser cette égalité. Les diverses tentatives furent infécondes.

En 1949, André Weil (1906-1998) fait découvrir à la communauté mathématique qu'on peut interpréter le concept classique de diviseur en étudiant les fibrés en droites holomorphes. À chaque diviseur D sur X, on associe un fibré en droites holomorphe L_D sur X. On associe aussi à chaque fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann un diviseur sur cette même surface. La correspondance entre diviseurs et fibrés en droites est très riche car $L(D) \cong \mathcal{L}_D(X)$, où $\mathcal{L}_D(X)$ représente l'espace des sections du fibré L_D. C'est grâce aux fibrés en droite qu'on saura généraliser le théorème de Riemann-Roch. Le rythme de l'histoire commence à s'accélérer.

En 1950-51, Henri Cartan (1904-) prend conscience que la notion de faisceau, qui sera expliquée dans un des premiers chapitres de ce mémoire, est très utile pour exprimer élégamment certains résultats de géométrie analytique obtenus dans les vingt années qui venaient de s'écouler. Poussé par Jean-Pierre Serre (1926-), il montre que la cohomologie des faisceaux peut mener à des généralisations et des simplifications. Les calculs se simplifient effectivement, le faisceau $\mathcal{L}_D$ des sections de L_D est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_D$ où

$$\mathcal{O}_D(U) = \{f \mid f \text{ méromorphe sur } U \text{ et } \forall p \in U \quad \mathrm{ord}_p f + D(p) \geq 0\},$$

C'est Pierre Dolbeault (1924-) qui met le feu aux poudres en janvier 1953 avec son « Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes » publié dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Dans ces notes, Dolbeault utilise un complexe de formes différentielles $\mathbb{C}^\infty$ qu'il sépare en parties holomorphes et anti-holomorphes. Une spécialisation de ses résultats en dimension 1 complexe nous mène au Lemme de Dolbeault qui nous permettra de montrer que $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D) = 0$ pour $q \geq 2$.

Serre, guidé par ses résultats et ceux de Cartan sur les variétés de Stein et par le fait que $L(D) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$ s'est mis en quête d'appliquer la cohomologie des faisceaux au problème Riemann-Roch. On écrira donc en langage moderne

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) = \deg(D) + 1 - g$$

Serre montre aussi quelques mois plus tard son fameux théorème de dualité qui stipule, en quelque sorte, que l'apparition du diviseur canonique K dans les travaux de Roch n'est pas fortuite.

Au printemps 1953, René Thom (1923-) publie quatre notes dans les Comptes-Rendus où il résume les résultats d'un papier qu'il publiera l'année suivante. Friedrich Hirzebruch, passant alors l'année à l'Institute for Advanced Studies à Princeton, prit connaissance de ces résultats et fut convaincu que ça lui permettrait de résoudre une certaine conjecture due à Todd. Il parvint à montrer ce qu'il voulait en décembre de cette même année et avec sa généralisation de la notion de genre, il déduisit un théorème de Riemann-Roch généralisé pour les variétés algébriques.

Le théorème de Riemann-Roch sous toutes ses formes se retrouve encore aujourd'hui au coeur des mathématiques. J'ai assisté en mai 1999 à deux jours et demi de conférences en l'honneur de Hirzebruch, Singer, Atiyah et Bott. Pendant ces deux jours et demi, de brillants mathématiciens présentèrent de récents développements en mathématiques et certaines questions ouvertes. Dans presque tous les exposés, la formule de Riemann-Roch jouait un rôle clef. J'aimerais donner l'occasion aux lecteurs de ce mémoire d'apercevoir au moins une fois dans leur vie la pointe de l'iceberg.

Ce mémoire expliquera donc le théorème de Riemann-Roch classique sous une forme faisceautique. Nous verrons ensuite comment les fibrés en droites apparaissent dans cette histoire. Dans un dernier temps, j'esquisserai comment le théorème de Riemann-Roch et celui de la dualité de Serre peuvent nous aider à montrer que toute courbe elliptique peut s'écrire sous une forme normale qu'on appelle forme de Weierstrass.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

Pour lire ce mémoire, il est fort probable qu'un premier cours d'analyse complexe et un premier cours de topologie, ou au moins une idée claire du concept d'espace topologique, soient suffisants. Ce bref chapitre fixe certaines définitions avec lesquelles nous allons travailler tout au long ce mémoire. Il ne s'agit que d'un survol rapide d'éléments essentiels à la compréhension.

1.1 Notations élémentaires

On utilise les symboles suivants pour dénoter divers ensembles

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C} & \text{les nombres complexes} \\ \mathbb{R} & \text{les nombres réels} \\ \mathbb{Z} & \text{les entiers: } \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \\ \mathbb{N} & \text{les entiers naturels: } \{0,1,2,\ldots\} \end{array}$$

Si B est un ensemble, $A \subset B$ veut dire que A est un sous-ensemble de B. Attention, $A \subset B$ n'exclut pas la possibilité que $A = B$. Pour dénoter l'union disjointe de deux ensembles, on utilise le symbole $\sqcup$.

Si A et B sont deux sous-ensembles d'un espace topologique, on dit que A est un sous-ensemble relativement compact de B et on écrit $A \Subset B$si $\overline{A} \subset B$ et $\overline{A}$ compact. Ici, $\overline{A}$ est l'adhérence de A.

Un espace topologique discret est un espace topologique dont chaque point constitue un ouvert. Un sous-ensemble discret d'un espace topologique n'a pas à être fermé. Ainsi, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est discret mais n'est pas fermé. Si E est un sous-ensemble d'un espace topologique, on notera $\overline{E}$ son adhérence et $\mathrm{int}E$ son intérieur.

Pour définir certaines notations ou pour donner un nom simple à une formule peut-être plus compliquée, on utilise la notation « $:=$ » empruntée à l'informatique. Ainsi, $a := 2$ signifie qu'on doit considérer a comme étant le nombre 2 et n'indique pas qu'il y a eu comparaison.

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un groupe abélien de neutre 0 et $J := \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$ est fini alors par définition $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in J} a_i$.

Si f est une fonction d'un ensemble A dans un ensemble B, on note souvent $f : A \to B$ et l'image de cette fonction est $\mathrm{Im}(f) := \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tel que } f(a) = b\}$.

Si $\psi : G \to H$ est un homomorphisme de groupes ou d'espaces vectoriels, on note son noyau $\ker(\psi) := \{g \in G \mid \psi(g) = 0\}$ où 0 est ici le neutre de H.

Si $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction continue d'un espace topologique X dans $\mathbb{C}$ (ou de la même façon dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$), on appelle le support de f l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(f) := \overline{X \setminus f^{-1}(0)}$$

où pour toute fonction $\psi : A \to B$ et tout $b \in B$ on note $\psi^{-1}(b)$ l'ensemble $\{a \in A \mid \psi(a) = b\}$. Dans le cas où ψ est bijective, on notera aussi ψ^{-1} l'inverse fontionnel de ψ.

Si $f : A \to B$ est une fonction et $A' \subset A$, on note $f\Big|_{A'}$ la fonction de A' dans B qui est la restriction de f, c'est-à-dire que $f\Big|_{A'}(a) = f(a)$ pour tout $a \in A'$.

1.2 Holomorphe et cie

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$, où U est un ouvert de $\mathbb{C}$, est *holomorphe* si la dérivée de f existe en tout point de U. Donc le mot holomorphe veut simplement dire qu'on a une fonction complexe différentiable au sens où la limite suivante existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Mais on peut montrer qu'en fait les fonctions complexes sont beaucoup plus simples que les fonctions réelles et que si on peut dériver f une fois, on peut alors la dériver aussi souvent qu'on veut. De plus, f est *analytique*, c'est-à-dire qu'assez près de tout point $a \in U$, on a $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$. Réciproquement, toute fonction analytique est holomorphe.

Si $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ pour $u, v : U \to \mathbb{R}$ et si les dérivées partielles de u et v existent, alors f est holomorphe si et seulement si les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, à savoir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si on écrit $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, les équations de Cauchy-Riemann prennent la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{R}^2$ sans la structure multiplicative, est dite infiniment différentiable, ou C^∞, si toutes les dérivées partielles possibles de la partie réelle et de la partie imaginaire de f existent. Si U n'est pas ouvert, on dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est C^∞ s'il existe un ouvert V tel que $V \supset U$ et une fonction g qui est C^∞ sur V telle que $g\big|_U = f$.

Théorème 1.2.1 (Formule intégrale de Cauchy) *Pour un ouvert U de $\mathbb{C}$ borné et dont la frontière ∂U est lisse, si f est une fonction C^∞ sur $\overline{U}$, on a pour $\zeta \in U$*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\iint_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}\overline{z}\mathrm{d}z$$

Preuve Utiliser le théorème de Stokes (voir page 18) sur $U_\epsilon := \{z \in U \mid |z-\zeta| > \epsilon\}$ et faire tendre ϵ vers 0. ∎

Si f est holomorphe, on a donc

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-\zeta} \mathrm{d}z$$

Dans (Lang, 1985), chapitre V, Lang utilise la formule intégrale de Cauchy pour montrer le théorème suivant:

Théorème 1.2.2 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U qui converge uniformément sur tout compact dans U alors la fonction limite f est holomorphe.*

On note $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes $U \to \mathbb{C}$ pour un ouvert $U \subset \mathbb{C}$.

Définition 1.2.3 (Fonction méromorphe) *Si f est holomorphe sur $U \setminus P$ où P est un sous-ensemble discret de U et si pour tout $p \in P$, il y a un voisinage V de p tel que $V \cap P = \{p\}$ et tel que pour tout point z de $V \cap U \setminus \{p\}$, on a*

$$f(z) = \sum_{n \geq k_p} a_n (z-p)^n$$

où $k_p \leq -1$ et $a_{k_p} \neq 0$, on dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est méromorphe*, que $f(p) = \infty$ pour tout $p \in P$ et que le point $p \in P$ est un* pôle *d'ordre k_p.*

Remarquons que P doit être fermé car si une suite (p_n) dans P converge vers $p \in \mathbb{C}$, f ne peut pas être holomorphe en p donc $p \in P$.

On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U. Clairement, on a $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{M}(U)$. Pour $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$, si $f(z_0) = 0$, on dit que z_0 est un *zéro* d'ordre k de f si on peut écrire $f(z) = \sum_{n \geq k} a_n (z-z_0)^n$ avec $a_k \neq 0$ dans un voisinage de z_0.

1.3 Surfaces de Riemann

La référence la plus jolie pour l'étude des surfaces de Riemann est (Forster, 1981). Ce mémoire s'inspire en partie du chapitre deux de ce bouquin.

Définition 1.3.1 (Surface de Riemann) *Soit X un espace topologique connexe séparé. Un* atlas holomorphe *pour X est une famille d'homéomorphismes $(\phi_i : U_i \to O_i)_{i \in I}$ où*

1. *U_i est un ouvert de X*
2. *O_i est un ouvert de $\mathbb{C}$*
3. *$\bigcup_{i \in I} U_i = X$*

telle que pour tous i et j dans I tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, l'homéomorphisme

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}\Big|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est une fonction holomorphe.

Les éléments d'un atlas sont appellés des cartes *et les domaines de ces fonctions sont appellés des* ouverts de cartes. *On écrira parfois « Soit (U, ϕ) une carte » pour exprimer le fait que $\phi : U \to \phi(U)$ est une carte.*

Une surface de Riemann *est un espace topologique connexe séparé muni d'un atlas holomorphe*

On dira que $(\phi_i)_{i \in I} \prec (\psi_j)_{j \in J}$ si tout ϕ_i est l'un des ψ_j.

Pour les besoins du mémoire, on considérera toujours qu'on a un atlas maximal ce qui nous permettra de supposer l'existence de n'importe quelle carte. En particulier, si (U, ϕ) est une carte, alors pour un ouvert $V \subset U$, $(V, \phi\big|_V)$ est une carte. On peut montrer que tout atlas holomorphe est plus petit (au sens $\prec$) qu'un atlas holomorphe maximal.

En somme, une *surface de Riemann X* est un espace topologique connexe séparé localement modelé sur le plan complexe.

En particulier, un ouvert connexe d'une surface de Riemann est aussi une surface de Riemann.

1.4 Les morphismes entre surfaces de Riemann

Définition 1.4.1 (Fonction holomorphe) *Si X et Y sont deux surfaces de Riemann, on dit qu'une fonction f est* holomorphe *si pour toute carte (U_1, ϕ_1) de X et toutes les cartes (U_2, ϕ_2) de Y telles que $f(U_1) \subset U_2$ on a $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}\Big|_{\phi_1(U_1)} : \phi_1(U_1) \to \phi_2(U_2)$ holomorphe.*

Bien sûr, $\mathbb{C}$ étant lui-même une surface de Riemann, on sait maintenant ce qu'est une fonction holomorphe $X \to \mathbb{C}$. Pour un ouvert U de X, on notera $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes $U \to \mathbb{C}$.

Définition 1.4.2 (Pôle) *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $U \setminus \{p\}$ d'une surface de Riemann et s'il existe une carte (V, z) centrée en p (c'est-à-dire telle que $z(p) = 0$) telle que $f(z) = \sum_{n \geq k_p} a_n z^n$ pour un entier $k_p < 0$ avec $a_{k_p} \neq 0$, on dit que p est un* pôle *d'ordre k_p de f.*

Définition 1.4.3 (Fonction méromorphe) *Si f est holomorphe sur un ouvert $U \setminus P$ d'une surface de Riemann où P est un sous-ensemble fermé et discret de U et si pour tout $p \in P$, p est un pôle de f, on dit alors que $f : U \to \mathbb{C}$ est une* fonction méromorphe *sur U.*

On notera aussi $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes $U \to \mathbb{C}$ pour un ouvert U d'une surface de Riemann.

Lorsqu'on dit qu'un sous-ensemble $S \subset X$ est *localement fini* on entend un sous-ensemble S tel que pour tout compact $K \subset X$, $K \cap S$ est fini.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}(X)$, les zéros et les pôles de f forment un sous-ensemble discret fermé de X. L'ensemble $\{p \mid \mathrm{ord}_p f \neq 0\}$ est donc localement fini pour toute fonction f méromorphe, où

$$\mathrm{ord}_p f = \begin{cases} -k & \text{si } p \text{ est un pôle d'ordre } k \text{ de } f \\ k & \text{si } p \text{ est un zéro d'ordre } k \text{ de } f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un résultat important en analyse complexe est ce qu'on appelle le principe du maximum qui dit que toute fonction holomorphe non-constante $X \to \mathbb{C}$ n'atteint jamais son maximum en valeur absolue. On déduit ce résultat du fait que si $f : X \to Y$ est une fonction holomorphe non-constante entre deux surfaces de Riemann, alors f est une fonction ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert $U \subset X$, $f(U)$ est un ouvert de Y.

Un corollaire de ce résultat est le

Théorème 1.4.4 *Soit X et Y deux surfaces de Riemann, X compacte et $f : X \to Y$ une fonction holomorphe non-constante. Alors f est surjective (donc Y compacte).*

Preuve $f(X)$ est compact donc fermé et ouvert puisque f ouverte. Y étant connexe, $f(X) = Y$. ∎

Puisque $\mathbb{C}$ est non-compact, nous pouvons conclure

Théorème 1.4.5 *Si X est compact, $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$.* ∎

Ceci veut dire que les seules fonctions holomorphes sur une surface de Riemann compacte sont les fonctions constantes.

1.5 Fonctions C^∞ et dérivées

Pour un ouvert U de $\mathbb{C}$, on note $\mathfrak{C}(U)$ l'ensemble des fonctions C^∞ de U dans $\mathbb{C}$. Pour un ouvert U d'une surface de Riemann X, on note aussi $\mathfrak{C}(U)$ l'ensemble des fonctions

f de U dans $\mathbb{C}$ telles que pour toute carte $\phi : U' \to O \subset \mathbb{C}$, avec $U' \cap U \neq \varnothing$, la fonction $f \circ \phi^{-1}\Big|_{U' \cap U}$ est C^∞. On dira alors que f est C^∞.

Soit (U, ϕ) une carte sur X, $U \subset U'$ et $f : U' \to \mathbb{C}$ une fonction C^∞. Pour tout $p \in U$ on notera souvent par abus de langage $\frac{\partial f}{\partial z}(p)$ le nombre complexe

$$\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial z}(\phi(p)).$$

Utilisant la notion équivalente pour $\overline{z}$, on peut dire que f est holomorphe en p si

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \overline{z}}(\phi(p)) = 0.$$

Probablement qu'une notation moins confuse, du genre $\frac{\partial f}{\partial \phi}$, serait utile. Souvent, on nommera une carte z pour diminuer la confusion. Ainsi, si (U, z) et (U', z') sont deux cartes autour de a, on a par définition que

$$\frac{\partial z'}{\partial z}(a) = \frac{\partial (z' \circ z^{-1})}{\partial z}(z(a))$$

Attention ici au fait que le z au numérateur est une carte tandis que le z au dénominateur est une coordonnée dans $\mathbb{C}$. Si on note c la valeur de la dérivée qu'on vient d'obtenir, on aura alors

$$\frac{\partial \overline{z'}}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial (\overline{z'} \circ z^{-1})}{\partial \overline{z}}(z(a)) = \frac{\partial (\overline{z' \circ z^{-1}})}{\partial \overline{z}}(z(a)) = \overline{\frac{\partial (z' \circ z^{-1})}{\partial z}}(z(a)) = \overline{c}$$

et puisque le changement de cartes $z' \circ z^{-1}$ est holomorphe, on a

$$\frac{\partial z'}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial (z' \circ z^{-1})}{\partial \overline{z}}(z(a)) = 0$$

On utilisera le résultat de ces calculs à la section suivante.

1.6 Formes différentielles

Si $a \in X$, on considère l'ensemble $\mathfrak{C}_a$ des germes de fonctions difféntrentielles en a. Il s'agit de l'ensemble

$$\mathfrak{C}_a := \frac{\bigcup_{U \ni a} \mathfrak{C}(U)}{\sim}$$

où $\mathfrak{C}(U) \ni f \sim g \in \mathfrak{C}(V)$ s'il existe $U' \subset U \cap V$ tel que $a \in U'$ et $f\Big|_{U'} = g\Big|_{U'}$. On considère l'espace vectoriel $m_a \subset \mathfrak{C}_a$ des germes dont les représentants évalués en a s'annulent (ce fait ne dépend pas du représentant choisi). On considère par ailleurs le sous-espace vectoriel $m_a^2 \subset m_a$ composé des germes dont un représentant $f \in \mathfrak{C}(U)$, où U est un ouvert de carte, satisfait $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$.

On appelle *cotangent* de X en a le quotient $\mathrm{T}_a^{(1)} := m_a/m_a^2$. Pour $f \in \mathfrak{C}(U)$, on note $\mathrm{d}_a f$ la classe d'équivalence dans $\mathrm{T}_a^{(1)}$ du germe en a de la fonction $f - f(a)$. Une base de $\mathrm{T}_a^{(1)}$ est formée par $\mathrm{d}_a z$ et $\mathrm{d}_a \overline{z}$, et on a

$$\mathrm{d}_a f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(a)\mathrm{d}_a z}_{\mathrm{d}'_a f} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\mathrm{d}_a \overline{z}}_{\mathrm{d}''_a f}$$

Pour une preuve de ce résultat on consulte (Forster, 1981) ou on fait la preuve soi-même en considérant plutôt l'ensemble $\{\mathrm{d}_a x, \mathrm{d}_a y\}$ qu'on montre être une base de $\mathrm{T}_a^{(1)}$ en regardant le développement de Taylor de f en a, se rappelant que les termes d'ordre 2 et plus sont absorbés par m_a^2.

Si (U, z) et (U', z') sont deux cartes autour de a, les calculs qu'on a fait à la section précédente montrent que $\mathrm{d}_a \overline{z'} = \overline{c}\mathrm{d}_a \overline{z}$ où $c = \frac{\partial (z' \circ z^{-1})}{\partial z}(z(a)) = \frac{\partial z'}{\partial z}(a)$ donc les espaces vectoriels

$$\mathrm{T}_a^{1,0} := \mathbb{C}\mathrm{d}_a z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_a^{0,1} := \mathbb{C}\mathrm{d}_a \overline{z}$$

sont indépendants du choix de la carte.

Définition 1.6.1 *Soit $U \subset X$ un ouvert. Une* 1-forme *sur U est une fonction*

$$\omega : U \to \bigsqcup_{a \in U} \mathrm{T}_a^{(1)}$$

telle que pour tout $a \in U$, $\omega(a) \in \mathrm{T}_a^{(1)}$.

Si $\omega(a) \in \mathrm{T}_a^{1,0}$ pour tout a, on dit que ω est une 1-forme de type (1,0) *et si $\omega(a) \in \mathrm{T}_a^{0,1}$ pour tout a, on dit que ω est une* 1-forme de type (0,1).

Donc pour $f \in \mathfrak{C}(U)$, $\mathrm{d}f : a \to \mathrm{d}_a f$, $\mathrm{d}'f : a \to \mathrm{d}'_a f$ et $\mathrm{d}''f : a \to \mathrm{d}''_a f$ sont des 1-formes. Il faut noter cependant qu'il n'y a aucune raison d'avoir une fonction $f \in \mathfrak{C}(U)$ telle que $\mathrm{d}f = \omega$ pour une 1-forme donnée ω sur U.

Définition 1.6.2 *Soit $U \subset X$ un ouvert. Une 1-forme ω sur U est une forme* différentielle *si pour toute carte (V, z) on a sur $U \cap V$*

$$\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\overline{z}$$

avec $f, g \in \mathfrak{C}(U \cap V)$.

Si $f \in \mathcal{O}(U \cap V)$ et $g = 0$, on dit que ω est une 1-forme holomorphe*.*

On note

$\mathfrak{C}^{(1)}(U)$	*l'ensemble des 1-formes différentielles sur U*
$\mathfrak{C}^{1,0}(U)$	*l'ensemble des 1-formes différentielles de type (1,0) sur U*
$\mathfrak{C}^{0,1}(U)$	*l'ensemble des 1-formes différentielles de type (0,1) sur U*
$\Omega(U)$	*l'ensemble des 1-formes holomorphes sur U*

Bien sûr, on doit aussi avoir une notion semblable aux fonctions méromorphes. Ici, si on écrit $\omega = f\mathrm{d}z$, un *pôle de la 1-forme holomorphe* ω est par définition un pôle de f.

Définition 1.6.3 *Si ω est une 1-forme holomorphe sur $U \setminus P$ où P est un sous-ensemble discret et fermé de U et si chaque $p \in P$ est un pôle pour ω alors ω est appelée une 1-forme* méromorphe

On note $\mathcal{M}^{(1)}(U)$ l'ensemble des 1-formes méromorphes sur U.

1.7 Les formes de dimension supérieure et le produit extérieur

Pour définir les p-formes pour $p > 1$, il faut introduire la notion de produit extérieur. Il faut se rappeller que si V est un espace vectoriel, on note $\bigwedge^n V$ l'espace vectoriel qui solutionne le problème universel suivant: il existe une application multilinéaire $V^n \to \bigwedge^n V$ telle que

pour *toute* application *multilinéaire alternée* $l : V^n \to W$

où W est un espace vectoriel sur le même corps K,

il existe une *unique* application *linéaire* $\widetilde{l} : \bigwedge^n V \to W$

telle que
$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "l"] \arrow[d] & W \\ \bigwedge^n V \arrow[ur, dotted, "\widetilde{l}"'] & \end{tikzcd}$$
commute.

On appelle $\bigwedge^n V$ le produit extérieur de V avec lui-même n fois.

Dans le cas où $\dim_K V = 2$, on a $\bigwedge^n V = 0$ pour $n \geq 3$ et $\bigwedge^2 V = Ke_1 \wedge e_2$ où $\{e_1, e_2\}$ est une base de V.

Plus généralement, $\bigwedge^n V$ est l'espace vectoriel des sommes finies d'éléments $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ soumises aux règles

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge (v_i + v_i') \wedge \cdots \wedge v_n &= v_1 \wedge \cdots \wedge v_n + v_1 \wedge \cdots \wedge v_i' \wedge \cdots \wedge v_n \\ v_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda v_i) \wedge \cdots \wedge v_n &= \lambda(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} &= sgn(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \end{aligned}$$

pour des éléments $v_1, \ldots, v_n$ de V, pour un scalaire λ et une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$.

On pose $\mathrm{T}_a^{(n)} := \bigwedge^n \mathrm{T}_a^{(1)}$ et on définit

Définition 1.7.1 (n-forme) *Une n-*forme *sur un ouvert U d'une surface de Riemann X est une fonction*

$$\omega : U \to \bigsqcup_{a \in U} \mathrm{T}_a^{(n)}$$

où, pour tout $a \in U$, $\omega(a) \in \mathrm{T}_a^{(n)}$.

Bien sûr, toutes les n-formes pour $n \geq 3$ sont nulles car $\dim \mathrm{T}_a^{(1)} = 2$.

Définition 1.7.2 (2-forme différentielle) *Une* 2*-forme sur un ouvert* U *d'une surface de Riemann* X *est une* 2-forme différentielle *si pour toute carte* (U', z) *sur* X *on peut écrire*

$$\omega = f\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$$

avec $f \in \mathfrak{C}(U \cap U')$.

On note $\mathfrak{C}^{(2)}(U)$ *l'espace des 2-formes différentielles sur* U.

On peut étendre $\mathrm{d}, \mathrm{d}', \mathrm{d}''$ à des applications $\mathfrak{C}^{(1)}(U) \to \mathfrak{C}^{(2)}(U)$. Si $\omega \in \mathfrak{C}^{(1)}(U)$, localement on peut écrire

$$\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\overline{z}$$

et on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}\overline{z} \\ \mathrm{d}'\omega &= \mathrm{d}'f \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}'g \wedge \mathrm{d}\overline{z} \\ \mathrm{d}''\omega &= \mathrm{d}''f \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}''g \wedge \mathrm{d}\overline{z} \end{aligned}$$

Pour $\omega \in \mathfrak{C}^{1,0}(U)$, on a

$$w \in \Omega(U) \Longleftrightarrow \mathrm{d}\omega = 0.$$

En effet, localement on écrit $\omega = f\mathrm{d}z$ donc $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}\right) \wedge \mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z$.

1.8 Intégrales

Dans cette section, nous rappelons brièvement la théorie d'intégration des formes différentielles. Pour plus de détails, on peut lire la section 10 du chapitre 1 de (Forster, 1981) de laquelle cette section s'est inspirée ou le chapitre 4 de (Warner, 1983).

Intégration d'une 1-forme le long d'un chemin

Soit $\gamma : [0, 1] \to X$ est un chemin continu dans X. On peut couper ce chemin en un nombre fini de bouts, chacun contenu dans un ouvert de carte puisque $\gamma([0, 1])$ est compact. On a donc des temps $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ et des cartes $(U_k, z_k = x_k + iy_k)$, $1 \leq k \leq n$ tels que $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$.

Soit $\omega \in \mathfrak{C}^{(1)}(X)$. Sur U_k on peut écrire $\omega = f_k \mathrm{d}x_k + g_k \mathrm{d}y_k$ où f_k et g_k sont des éléments de $\mathfrak{C}(U_k)$.

On pose alors

$$\int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}x_k(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} + g_k(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}y_k(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t.$$

On peut montrer que cette définition ne dépend ni de la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ choisie ni des cartes choisies.

Intégration d'une 2-forme sur une région

Tout comme dans le cas d'une 1-forme, la définition de l'intégrale d'une 2-forme est récursive, on se ramène toujours à des cas d'intégrations plus simples. Commençons tout d'abord par considérer une 2-forme $\omega \in \mathfrak{C}^{(2)}(U)$ à support compact pour un ouvert U de $\mathbb{C}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\omega = f \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2if \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

où $f \in \mathfrak{C}(U)$. On pose alors

$$\iint_U \omega := \iint_U f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Classiquement, un changement de coordonnées biholomorphes $\phi : V \to U$ se traite avec l'aide du Jacobien. Si on note u et v les coordonnées naturelles dans V (que l'on nommerait autrement x et y) on écrit $\phi(u, v) = x(u, v) + iy(u, v)$. Le jacobien de cette transformation est

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ici $|A|$ dénote le déterminant de la matrice A. La règle de calcul avec les changements de coordonnées est

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

d'où
$$\iint_U f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_V (f\circ\phi)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Dans un langage plus moderne, si ω est une 2-forme sur U et ϕ un biholomorphisme $V \to U$, on note $\phi^*\omega$ la forme sur V qu'on exprime localement par $(f\circ\phi)\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\overline{\phi}$ lorsqu'on exprime localement ω par $f\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}$. Le changement de coordonnées s'écrit alors
$$\iint_V \phi^*\omega = \iint_U \omega.$$

Pour une forme ω à support compact compris dans une carte (U,ϕ) d'une surface de Riemann, on pose
$$\iint_U \omega := \iint_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega.$$

Pour intégrer une 2-forme C^∞ à support compact quelconque sur une surface de Riemann X, on utilise une partition de l'unité. On sait qu'on a un nombre fini de cartes (U_k,ϕ_k), $1\leq k\leq n$ telles que $\mathrm{Supp}(\omega)\subset\bigcup_{k=1}^n U_k$. Une partition de l'unité est une famille $(f_k : X\to\mathbb{R})_{1\leq k\leq n}$ de fonctions C^∞ telle que

1. $\mathrm{Supp}(f_k)\subset U_k$

2. $\sum_{k=1}^n f_k(x) = 1$ pour tout $x\in\mathrm{Supp}(\omega)$.

La 2-forme $f_k\omega$ a son support compact dans U puisque $\mathrm{Supp}(f_k\omega)\subset\mathrm{Supp}(\omega)$ qui est compact et un fermé dans un compact est compact. On a alors $\omega = \sum_{k=1}^n f_k\omega$ ce qui nous permet de définir
$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^n \iint_{U_k} f_k\omega.$$

Théorème de Stokes

Un théorème utilisé fréquemment relie l'intégrale d'une 2-forme $\mathrm{d}\omega$ sur une région R à l'intégrale de la 1-forme ω sur le bord ∂R de la région.

Un sous-ensemble R d'un espace topologique X est appelé un *domaine régulier* si tout $a \in X$ respecte l'une des conditions suivantes

1. a est dans l'intérieur de $X \setminus R$
2. a est dans l'intérieur de R
3. a est tel qu'il existe un homéomorphisme $\phi : U \to O$, où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et U un ouvert de X contenant a, tel que $\phi(a) = (0,0)$, homéomorphisme pour lequel $\phi(U \cap R) = \phi(U) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Les points qui satisfont à la condition 3 forment ∂R, ce qu'on appelle le bord de R. En pratique, nous utiliserons seulement le théorème de Stokes formulé pour un domaine régulier.

Théorème 1.8.1 (Stokes) *Soit R un domaine régulier d'une surface de Riemann. Soit ω une 1-forme* C^∞ *à support compact. On a alors*

$$\iint_R \mathrm{d}\omega = \int_{\partial R} \omega.$$

Preuve On peut consulter le chapitre 4 de (Warner, 1983) pour une preuve générale. Si on veut n'avoir qu'une idée simple où R est une région en forme d'anneau, la section 10.19 du chapitre 1 de (Forster, 1981) est conseillée. Pour un traitement complet où l'on trouve quoi faire même si R a des singularités, voir le chapitre XXIII de (Lang, 1993). ■

Corollaire 1.8.2 *Soit X une surface de Riemann et $\omega \in \mathfrak{C}^{(1)}(X)$ une 1-forme différentielle à support compact. On a alors*

$$\iint_X \mathrm{d}\omega = 0.$$

■

1.9 Analyse fonctionnelle

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. Une norme sur un espace de Banach E sur les complexes est une fonction $|\cdot| : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant aux axiomes suivants:

1. Si $x \in E$ alors $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. Si $c \in \mathbb{C}$ et $x \in E$, alors $|cx| = |c||x|$.
3. Si $x, y \in E$ alors $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy converge et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel V muni d'une norme $|\cdot|$ est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N suffisamment grand pour que, quelques soient les naturels n et m supérieurs à N, on ait $|x_n - x_m| < \epsilon$.

La notion de convergence est une notion topologique. La définition qu'on vient de voir suggère donc que la topologie qu'on considère sur un espace de Banach soit induite par la norme. Il s'agit d'une topologie bien particulière comme le montre le théorème suivant:

Théorème 1.9.1 (Fonction ouverte) *Si E et F sont deux espaces de Banach et $\phi : E \to F$ est une application linéaire continue qui est surjective alors ϕ est une fonction ouverte, c'est-à-dire que l'image de tout ouvert de E par ϕ est un ouvert de F.*

Preuve (Lang, 1993), chapitre XV, §1, théorème 1.3 page 388. ∎

On peut montrer qu'une application linéaire $\phi : E \to F$ est continue si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que $|\phi(x)| \leq C|x|$ pour tous $x \in E$. Un corollaire intéressant au théorème de la fontion ouverte nous permet d'avoir une inégalité dans l'autre sens dans certains cas.

Corollaire 1.9.2 *Si E et F sont deux espaces de Banach et $\phi : E \to F$ est une application linéaire continue qui est surjective alors il existe une constante réelle $C > 0$ telle que pour tout $y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que*

$$f(x) = y \qquad et \qquad |x| \leq C|y|$$

Preuve C'est la preuve de (Forster, 1981), appendice B page 240 qu'on reprend ici. Soit $U := \{x \in E \mid |x| < 1\}$. Par le théorème de la fonction ouverte, $f(U)$ est ouvert donc il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$f(U) \supset V := \{y \in F \mid |y| < \epsilon\}.$$

Posons $C := \frac{2}{\epsilon}$. Si $y \in F$ on veut trouver $x \in E$ qui satisfait les conclusions du corollaire. Dans le cas où $y = 0$, il suffit de prendre $x = 0$. Supposons donc que $y \neq 0$ et posons $\lambda := |y|$. On a $y_1 := \left(\frac{1}{\lambda C}\right) y \in V$ donc il existe $x_1 \in U$ tel que $f(x_1) = y_1$. En posant $x := \lambda C x_1$, on a $f(x) = y$ et $|x| = \lambda C |x_1| < \lambda C = C|y|$ et la preuve est finie. ■

1.10 Lemme de Dolbeault

Comme le lemme de Dolbeault garantissant la surjectivité de l'application $\partial/\partial\overline{z}$ sur les fonctions C^∞ est d'une importance capitale dans ce mémoire, nous consacrons un peu plus de temps pour ce préliminaire que pour les autres. La preuve de (Beaudet) demande peu de préliminaires. C'est de celle-ci que nous nous inspirons pour le lemme suivant.

Lemme 1.10.1 *Si $g \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$ est à support compact alors il existe $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$ telle que*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$$

Preuve Posons

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w - z} \mathrm{d}\overline{w}\mathrm{d}w$$

pour $z \in \mathbb{C}$. Montrons que $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$ et que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$.

Rappelons-nous que l'intégrale d'une fonction C^∞ est elle-même une fonction C^∞. Ici, cependant, nous sommes coincés par le fait que $\frac{g(w)}{w-z}$ n'est pas C^∞ en z. Nous aurons besoin d'une astuce. Soit D une boule de rayon assez grand pour que $\mathrm{Supp}(g) \subset D$. Soit $z_0 \in D$ et prenons $\epsilon > 0$ tel que $B(z_0, 2\epsilon) \subset D$ où $B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. Les ouverts $U_1 = B(z_0, 2\epsilon)$ et $U_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, \epsilon)}$ recouvrent $\mathbb{C}$.

Soit (ϕ_1, ϕ_2) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, c'est-à-dire qu'on a $\phi_j \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Supp}(\phi_j) \subset U_j$ et $\phi_1 + \phi_2 = 1$.

Posons $g_j := \phi_j g$ et

$$f_j(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g_j(w)}{w - z} \mathrm{d}\overline{w}\mathrm{d}w$$

En faisant le changement de variable $u = w - z$, on a

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g_1(u + z)}{u} \mathrm{d}\overline{u}\mathrm{d}u$$

et en faisant le changement $u = re^{i\theta}$, $\overline{u} = re^{-i\theta}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overline{u}\mathrm{d}u &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial \theta} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \begin{vmatrix} e^{-i\theta} & e^{i\theta} \\ -ire^{-i\theta} & ire^{i\theta} \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2ire^{i\theta - i\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2iue^{-i\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

d'où

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} g_1(z + re^{i\theta}) e^{-i\theta} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

donc $f_1 \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$.

Pour ce qui est de f_2, puisque $g_2\Big|_{B(z_0,\epsilon)} = 0$, on a que pour tout $z \in B(z_0, \epsilon)$, f_2 est l'intégrale d'une fonction C^∞ donc est elle-même C^∞. On a donc que f_2 est une fonction C^∞ sur $B(z_0, \epsilon)$. En somme, sur $B(z_0, \epsilon)$, $f = f_1 + f_2$ est C^∞. Puisque z_0 était quelconque, on a $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$.

Montrons maintenant que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$. Nous aurons besoin de dériver sous l'intégrale. Ceci est possible quand l'intégrale d'une fonction C^∞ est évaluée sur un compact. Plus généralement, c'est possible lorsque nous faisons l'intégrale d'une fonction C^∞ à support compact. (voir (Lang, 1993) chapitre XIII section 8) Si $z \in B(z_0, \epsilon)$, puisque g_2 est à support compact, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{g_2(w)}{w-z} \mathrm{d}\overline{w}\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} 0 \mathrm{d}\overline{w}\mathrm{d}w \\
&= 0
\end{aligned}$$

et, puisque $(r,\theta) \mapsto g_1(z + re^{i\theta})$ est à support compact, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big(g_1(z+re^{i\theta})\Big)e^{-i\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} g_1(u+z)\frac{\mathrm{d}\overline{u}\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} g_1(w)\frac{\mathrm{d}\overline{w}\mathrm{d}w}{w-z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\iint_{B(z_0,2\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} g_1(w)\frac{\mathrm{d}\overline{w}\mathrm{d}w}{w-z}
\end{aligned}$$

La formule intégrale de Cauchy nous donne

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,2\epsilon)} \frac{g_1(w)}{w-z}\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i}\iint_{B(z_0,2\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} g_1(w)\frac{\mathrm{d}\overline{w}\mathrm{d}w}{w-z} \\
&= 0 + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}(z) \qquad\qquad \text{car } g_1\Big|_{\partial B(z_0,2\epsilon)} \equiv 0
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour $z \in B(z_0, \epsilon)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}(z) = g_1(z) + 0 = g_1(z) + g_2(z) = g(z)$$

■

On va maintenant se débarasser du support compact, ce qui nous permettra au chapitre 2 de calculer la cohomologie à valeur dans les fonctions C^∞. C'est la preuve de (Forster, 1981) que nous reproduisons maintenant.

Lemme 1.10.2 (Dolbeault) *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. L'application*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} : \mathfrak{C}(U) \to \mathfrak{C}(U)$$

est surjective.

Preuve Pour tout $n \geq 1$, soit

$$F_n := \{z \in U \mid |z| \leq n\} \cap \{z \in U \mid \inf\{|z - z'| \mid z' \in \mathbb{C} \setminus U\} \geq \frac{1}{n}\}.$$

Puisque F_n est l'intersection de deux fermés et puisque F_n est borné alors F_n est compact. L'ensemble

$$\{z \in U \mid |z| < n+1\} \cap \{z \in U \mid \inf\{|z - z'| \mid z' \in \mathbb{C} \setminus U\} > \frac{1}{n+1}\}$$

est ouvert, contient F_n et est contenu dans F_{n+1}. On a donc $F_n \subset \mathrm{int}F_{n+1}$. Si on pose $U_n := \mathrm{int}F_n$, on a une suite d'ouverts emboîtés de telle sorte que

$$\overline{U_n} = \overline{\mathrm{int}F_n} \subset F_n \subset \mathrm{int}F_{n+1} = U_{n+1}.$$

Par ailleurs, on a clairement $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$.

Soit $g \in \mathfrak{C}(U)$. Pour tout i, soit ψ_i une fonction C^∞ sur U telle que $\mathrm{Supp}(\psi_i) \subset U_{i+1}$ et $\psi_i\Big|_{U_i} \equiv 1$. Par le lemme précédent, il existe $f_i \in \mathfrak{C}(U)$ telle que

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}} = \psi_i g$$

Construisons une suite un peu modifiée, la suite $(\widetilde{f_i})$ telle que

$$\frac{\partial \widetilde{f_i}}{\partial \overline{z}}\Big|_{U_i} = g\Big|_{U_i} \qquad \text{et, pour } i \geq 2, \qquad \|\widetilde{f}_{i+1} - \widetilde{f_i}\|_{U_{i-1}} < \frac{1}{2^i}$$

où la norme $\|\cdot\|_X$ évaluée sur une fonction $a : X \to \mathbb{C}$ est $\|a\|_X := \sup_{x \in X} |a(x)|$.

On construit une suite $(\widetilde{f_i})$ par récurrence, en commençant par $\widetilde{f_1} = f_1$. Supposons la suite construite jusqu'à l'indice n, on a

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f_{n+1} - \widetilde{f_n})\Big|_{U_{n+1}} = \psi_{n+1} g\Big|_{U_{n+1}} - g\Big|_{U_{n+1}} = 0$$

donc $f_{n+1} - \widetilde{f_n}\Big|_{U_{n+1}}$ est holomorphe. Il existe donc un polynôme $P(z)$ tel que

$$\|f_{n+1} - \widetilde{f_n} - P\|_{U_{n-1}} < \frac{1}{2^n}.$$

Posons alors $\widetilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P$ et on aura l'inégalité voulue sur les normes. Par ailleurs,

$$\frac{\partial \widetilde{f}_{n+1}}{\partial \overline{z}}\bigg|_{U_{n+1}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \overline{z}}\bigg|_{U_{n+1}} - \frac{\partial P(z)}{\partial \overline{z}}\bigg|_{U_{n+1}} = \psi_{n+1} g\Big|_{U_{n+1}} = g\Big|_{U_{n+1}}$$

Puisque pour tout $z \in U$, on a $z \in U_n$ pour n assez grand, on peut poser

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(z)$$

et sur U_n on a

$$f = \widetilde{f}_n + \sum_{k\geq n} (\widetilde{f}_{k+1} - \widetilde{f}_k)$$

Pour $k \geq n$, on a $\partial/\partial\overline{z}(\widetilde{f}_{k+1} - \widetilde{f}_k)\Big|_{U_n} = 0$ donc $\widetilde{f}_{k+1} - \widetilde{f}_k$ est holomorphe sur U_n.

La série $F_n := \sum_{k\geq n}(\widetilde{f}_{k+1} - \widetilde{f}_k)$ converge uniformément sur U_n et est par conséquent holomorphe, à plus forte raison C^∞. On a donc que, pour tout n, f est la somme de deux fonctions C^∞ sur U_n d'où $f \in \mathfrak{C}(U)$. Par ailleurs, pour tout n, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_{U_n} = g\Big|_{U_n}$$

d'où $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$ sur tout U. ∎

En modifiant un peu la preuve, on obtient un résultat analogue pour un domaine régulier du plan complexe.

1.11 Préliminaires algébriques: Suites exactes

Cette section est consacrée aux préliminaires plus algébriques. On y rappelle la notion de suite exacte ainsi qu'un théorème important.

Définition 1.11.1 (Suite exacte) *Une suite $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de groupes (d'anneaux, de modules,...) et de morphismes de groupes (d'anneaux, de modules,...) est dite* exacte *en B si* $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

Une suite est exacte *si elle l'est en tous les objets qui la composent.*

Lemme 1.11.2 *Si la suite*

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte finie d'espaces vectoriels de dimensions finies, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Preuve On prouve cet énoncé par récurrence. Pour $n = 1, 2$, il n'y à rien a prouver. Pour $n = 3$, il faut constater que le fait que la suite

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

soit exacte implique

$$V_3 = \mathrm{Im}(V_2 \to V_3) \cong V_2 / \ker(V_2 \to V_3) = V_2/\mathrm{Im}(V_1 \to V_2)$$

or $V_1 \to V_2$ est injectif d'où $\dim \mathrm{Im}(V_1 \to V_2) = \dim V_1$ et donc $\dim V_3 = \dim V_2 - \dim V_1$.

Si l'énoncé est vrai pour n, montrons qu'il l'est pour $n+1$. Posons

$$W := \ker(V_{n-1} \to V_n) = \mathrm{Im}(V_{n-2} \to V_{n-1})$$

On peut alors couper la suite exacte initiale en deux

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{n-2} \longrightarrow W \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V_{n-1} \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$$

on vient de montrer que $\dim W = \dim V_{n-1} - \dim V_n$ d'où

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \dim V_i + (-1)^{n-1} \dim W \qquad \text{(par récurrence)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \dim V_i + (-1)^{n-1} (\dim V_{n-1} - \dim V_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i \end{aligned}$$

■

CHAPITRE II

FAISCEAUX ET COHOMOLOGIE

Présentons maintenant ce que Cartan voyait comme étant le langage naturel pour démontrer le théorème de Riemann-Roch. Notons en passant que le langage des faisceaux permet aussi de prouver nombre d'autres théorèmes intéressants.

Les preuves utilisant le langage des faisceaux et la cohomologie des faisceaux peuvent cependant laisser un goût amer au géomètre, celui de n'avoir rien vu passer, comme si tout avait été trop facile. On a cependant un outil de calcul très puissant.

Classiquement, on peut voir un faisceau comme les sections au-dessus d'un ouvert d'un espace étalé au-dessus d'un espace topologique. Tout cela est un peu trop technique et n'est plus vraiment à la mode. Plus générale, la notion de préfaisceau est suffisante pour développer les outils cohomologiques qu'on désire utiliser, à l'exception du théorème de Leray.

La théorie de cohomologie présentée dans ce chapitre porte dans la littérature le nom de *cohomologie de Čech*. On peut en savoir plus en consultant (Griffiths et Harris, 1978) ou (Warner, 1983).

Toujours dans l'idée de développer nos outils avec un minimum de conditions, nous travaillerons avec des préfaisceaux de groupes abéliens. Tout ce qu'on fait pour les préfaisceaux de groupes abéliens dans ce chapitre s'applique tel quel aux préfaisceaux d'espaces vectoriels.

2.1 Préfaisceaux

Définition 2.1.1 (Préfaisceau) *Un* préfaisceau de groupes abéliens $\mathfrak{F}$ *sur un espace topologique* X *est la donnée*

1. *pour tout ouvert* U *de* X*, d'un groupe abélien* $\mathfrak{F}(U)$
2. *pour toute inclusion* $U_1 \subset U_2$*, d'un homomorphisme de groupe* $\rho_{U_1}^{U_2} : \mathfrak{F}(U_2) \to \mathfrak{F}(U_1)$

tels que $\rho_U^U = id_U$ *et pour* $U_1 \subset U_2 \subset U_3$, $\rho_{U_1}^{U_3} = \rho_{U_1}^{U_2} \circ \rho_{U_2}^{U_3}$.

Pour le lecteur habitué au langage catégorique, un *préfaisceau de groupes abéliens* $\mathfrak{F}$ sur un espace topologique X est un foncteur à valeur dans la catégorie des groupes abéliens de la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et dont les flèches sont les inclusions renversées.

Exemples

Soit X une surface de Riemann. Voici quelques exemples de préfaisceaux de groupes abéliens sur X

1. Le préfaisceau des fonctions homomorphes $\mathcal{O}$. Pour U un ouvert de X,
$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphe}\}$$
Si $U_1 \subset U_2$, $\rho_{U_1}^{U_2}(f) = f\Big|_{U_1}$. La structure de groupe abélien sur $\mathcal{O}(U)$ est l'addition.
2. de la même façon, on a les préfaisceaux $\mathcal{M}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{(1)}, \mathfrak{C}^{1,0}, \mathfrak{C}^{0,1}, \Omega$ Des fonctions méromorphes, C^∞, des formes C^∞, C^∞ de type (1,0), C^∞ de type (0,1) et des formes holomorphes.
3. Le préfaisceau des fonctions holomorphes partout non-nulles $\mathcal{O}^*$. Pour U un ouvert de X,
$$\mathcal{O}^*(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphe et } \forall x \in U, f(x) \neq 0\}$$

Si $U_1 \subset U_2$, $\rho_{U_1}^{U_2}(f) = f\Big|_{U_1}$. La structure de groupe abélien sur $\mathcal{O}^*(U)$ est la multiplication.

4. Le gratte-ciel $\mathbb{C}_p$ pour $p \in X$. Pour U un ouvert de X,

$$\mathbb{C}_p(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } p \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $p \in U_1 \subset U_2$, $\rho_{U_1}^{U_2}(z) = z$. Si $U_1 \subset U_2$ mais $p \notin U_1$, $\rho_{U_1}^{U_2}(z) = 0$. La structure de groupe abélien est l'addition dans $\mathbb{C}$ et 0 est le groupe trivial.

5. Le préfaisceau constant G pour un groupe abélien G. Si U ouvert de X, $U \neq \varnothing$, $G(U) = G$ et $G(\varnothing) = 0$. Pour $\varnothing \neq U_1 \subset U_2$, $\rho_{U_1}^{U_2} = \mathrm{id}_G$.

Les habitués noteront que chacun des préfaisceaux donnés en exemple est aussi un faisceau. On définira la notion de préfaisceau à la section 2.5.

2.2 Cohomologie des préfaisceaux

À chaque préfaisceau $\mathfrak{F}$ sur X, on peut associer un complexe de cochaînes. Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de X, c'est-à-dire une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X tel que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. On définit pour tout $q \geq 0$ le groupe des *cochaînes*

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = \prod_{(i_0,\ldots,i_q)\in I^{q+1}} \mathfrak{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q})$$

avec l'addition facteur par facteur.

On a un homomorphisme de groupe appelé *opérateur de cobord*

$$\begin{array}{rccc} \delta^q : & C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) & \longrightarrow & C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \\ & (f_{i_0\cdots i_q})_{(i_0,\ldots,i_q)\in I^{q+1}} & \mapsto & (g_{i_0\cdots i_{q+1}})_{(i_0,\ldots,i_{q+1})\in I^{q+2}} \end{array}$$

où

$$g_{i_0\cdots i_{q+1}} = \sum_{l=0}^{q+1} (-1)^l \rho_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{q+1}}^{U_{i_0}\cap\cdots\cap\widehat{U_{i_l}}\cap\cdots\cap U_{q+1}} (f_{i_0\cdots\widehat{i_l}\cdots i_{q+1}})$$

et où l'accent circonflexe indique l'omission.

Pour éviter de s'embourber dans ce genre de notation lourde, on empruntera la notation utilisée dans le cas des préfaisceaux de fonctions et on remplacera au besoin ρ par le symbole de restriction. Par ailleurs, on notera $U_{i_0\cdots i_q}$ l'ouvert $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}$. On notera donc

$$g_{i_0\cdots i_{q+1}} = \sum_{l=0}^{q+1}(-1)^l f_{i_0\cdots\widehat{i_l}\cdots i_{q+1}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+1}}}$$

On notera par ailleurs $(f_{i_0\cdots i_q})$ ou tout simplement f la cochaîne $(f_{i_0\cdots i_q})_{(i_0,\ldots,i_q)\in I^{q+1}}$. Parfois, pour indiquer la composante d'indices $i_0\cdots i_{q+1}$ d'une cochaîne *truc*, on notera $(truc)_{i_0\cdots i_{q+1}}$.

Proposition 2.2.1 *Pour $q \geq 0$, on a $\delta^{q+1}\circ\delta^q = 0$.*

Preuve Posons $\delta(f_{i_0\cdots i_q}) = (g_{i_0\cdots i_{q+1}})$ et $\delta(g_{i_0\cdots i_{q+1}}) = (h_{i_0\cdots i_{q+2}})$. On a donc

$$\begin{aligned}
h_{i_0\cdots i_{q+2}} &= \sum_{l=0}^{q+2}(-1)^l g_{i_0\cdots\widehat{i_l}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}}\\
&= \sum_{l=0}^{q+2}(-1)^l\Big(\sum_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{q+2}\pm f_{i_0\cdots\widehat{i_l}\cdots\widehat{i_k}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots\widehat{i_l}\cdots i_{q+2}}}\Big)\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}}\\
&= \sum_{k<l}(-1)^{l+k} f_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots\widehat{i_l}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}} + \sum_{k>l}(-1)^{l+k-1} f_{i_0\cdots\widehat{i_l}\cdots\widehat{i_k}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}}\\
&= \sum_{k<l}(-1)^{l+k} f_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots\widehat{i_l}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}} - \sum_{l<k}(-1)^{l+k} f_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots\widehat{i_l}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

À la deuxième ligne du calcul, le $\pm$ signifie $(-1)^k$ si $k<l$ et $(-1)^{k-1}$ si $k>l$. ∎

Une suite de groupes et de morphismes satisfaisant la proposition 2.2.1 est appellée un *complexe*.

Si on note $Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \ker(\delta^q)$ (on se souvient de Z en pensant à « zéro ») et $B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \mathrm{Im}(\delta^q)$ (on se rappelle de B en pensant à « bord »), la proposition précédente nous dit que $B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\subset Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$. Les éléments de $Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ sont appelés des *cocyles* et ceux de $B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ des *cobords*.

Les suites exactes (voir définition 1.11.1 en page 24) jouent un rôle important en mathématiques. Notre complexe

$$C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to C^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to C^2(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to \cdots$$

ne sera exact en $C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ que si $B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$. Ce qui mesure la non-exactitude du complexe en $C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ est

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) := \frac{Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})}{B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})}$$

qu'on appelle le *q-ième groupe de cohomologie de X à coefficient dans le préfaisceau $\mathfrak{F}$ relativement au recouvrement $\mathfrak{U}$.*

Il est cependant embêtant de travailler avec un recouvrement particulier de notre espace X. Pourquoi en effet favoriser un recouvrement plutôt qu'un autre? On définit donc

$$\mathrm{H}^q(X,\mathfrak{F}) = \varinjlim \mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

où $\varinjlim$ dénote la limite inductive des $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$. On expliquera la notion de limite inductive dans quelques lignes.

Il est à noter que si en plus d'être un faisceau de groupes abéliens, $\mathfrak{F}$ est aussi tel que les $\mathfrak{F}(U)$ sont des espaces vectoriels et les restrictions sont des applications linéaires alors les $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ sont naturellement des espaces vectoriels et la limite inductive est aussi un espace vectoriel. Dans ce mémoire, les faisceaux que nous utilisons ont presque toujours une structure aussi rigide.

2.2.1 Construction de $\varinjlim$

Tout d'abord, qu'est-ce que la limite inductive? Nous travaillons ici avec des groupes commutatifs. La même construction est cependant valable pour des espaces vectoriels.

Supposons qu'on a un *système inductif* de groupes abéliens, c'est-à-dire la donnée de deux choses:

1. une famille $(G_i)_{i\in I}$ de groupes abéliens indexée par une ensemble ordonné I non-vide tel que pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ qui soit plus petit que les deux autres, c'est-à-dire $k \leq i$ et $k \leq j$;

2. un homomorphisme $\rho_i^j : G_j \to G_i$ à chaque fois que $i \leq j$. Ces homomorphismes satisfont, quand $i \leq k \leq j$, $\rho_i^j = \rho_i^k \circ \rho_k^j$ et $\rho_i^i = id$.

Une limite inductive de cette famille est la donnée d'une part d'un groupe abélien G, noté $\varinjlim G_i$ et d'autre part pour tout $i \in I$, d'homomorphismes $\rho_i : G_i \to G$ tels que $\rho_j = \rho_i \circ \rho_i^j$ desquels on exige qu'ils soient « les plus à gauche possible ». Par cela, on entend que s'il existe un groupe H et des morphismes $h_i : G_i \to H$ satisfaisant, quels que soient $i < j$, $h_j = h_i \circ \rho_i^j$ alors il existe un unique morphisme $h : G \to H$ tel que, pour tout $i \in I$, $h \circ \rho_i = h_i$. On peut résumer ceci par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
G_j \arrow[dd, "\rho_i^j"'] \arrow[dr, "\rho_j"] \arrow[drr, "h_j"] & & \\
& G \arrow[r, dotted, "h"] & H \\
G_i \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[urr, "h_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Bien sûr, toutes les limites inductives d'un même système inductif sont isomorphes.

Puisqu'on définit les groupes de cohomologie comme des limites inductives et qu'on va utiliser des outils cohomologiques dans tout ce mémoire, il serait important de s'assurer que toutes les limites pertinentes existent.

Théorème 2.2.2 (Constrution explicite de limite inductive) *Si on a un système inductif $(G_i)_{i\in I}$ de groupes abéliens alors*

$$\varinjlim G_i = G$$

où G est le quotient de la réunion disjointe des G_i par une relation d'équivalence $\backsim$, c'est-à-dire $G := \frac{\coprod G_i}{\backsim}$. Pour $a_i \in G_i$, $b_j \in G_j$, $a_i \backsim b_j$ si et seulement si $\exists k$ tel que $k \leq i$

et $k \leq j$ pour lequel $\rho_k^i(a_i) = \rho_k^j(b_j)$. Les homomorphismes (pour une struture de groupe à définir à l'instant) ρ_i donnés par la limite inductive sont les composés des injections canoniques $G_i \to \coprod G_i$ avec la projection canonique $\coprod G_i \to \frac{\coprod G_i}{\backsim}$. La structure de groupe sur G est la suivante: si $a, b \in G$, $a = \rho_i(a_i), b = \rho_j(b_j)$, on sait qu'il existe $k \in I$ tel que $k \leq i$ et $k \leq j$. On pose alors

$$a + b = \rho_k\Big(\rho_k^i(a_i) + \rho_k^j(b_j)\Big).$$

Preuve On doit tout d'abord s'assurer que G ainsi défini est bien un groupe abélien. Pour cela, on vérifie en premier lieu que $\backsim$ est bien une relation d'équivalence, ce qui est le cas puisque

- $\backsim$ est réflexive: puisque $\rho_i^i = id$, on a pour tout $i \in I$ et tout $a_i \in G_i$ que $a_i \backsim a_i$
- $\backsim$ est symétrique: trivial
- $\backsim$ est transitive: Si $a_i \in G_i$, $b_j \in G_j$ et $c_k \in G_k$ sont tels que $a_i \backsim b_j$ et $b_j \backsim c_k$, on sait qu'il existe l et l' tels que $l \leq i$, $l \leq j$, $l' \leq j$, $l' \leq k$, $\rho_l^i(a_i) = \rho_l^j(b_j)$ et $\rho_{l'}^j(b_j) = \rho_{l'}^k(c_k)$. On sait par ailleurs qu'il existe dans I un indice ℓ tel que $\ell \leq l$ et $\ell \leq l'$. On a donc $\rho_\ell^i(a_i) = \rho_\ell^l \circ \rho_l^i(a_i) = \rho_\ell^l \circ \rho_l^j(b_j) = \rho_\ell^j(b_j) = \rho_\ell^{l'} \circ \rho_{l'}^j(b_j) = \rho_\ell^{l'} \circ \rho_{l'}^k(c_k) = \rho_\ell^k(c_k)$ d'où $a_i \backsim c_k$.

En second lieu, on vérifie directement que G est un groupe.

- Le fait qu'il soit abélien n'a rien de surprenant puisque chaque G_i est abélien.
- Choisissons un i au hasard dans I. L'élément neutre e de G est $\rho_i(e_i)$ où e_i est le neutre de G_i. Cet élément de G est bien défini car choisissant un autre indice j, on a un $k \in I$ plus petit que i et j et, les ρ_k^i étant des homomorphismes, on a $\rho_k^i(e_i) = e_k = \rho_k^j(e_j)$ d'où $e_i \backsim e_j$. C'est bien l'élément neutre de G car si $a \in G$ est $\rho_i(a_i)$ pour $i \in I$ et $a_i \in G_i$, on a $a + e = \rho_i(a_i + e_i) = \rho_i(a_i) = a$.
- Avec cette notation, on voit que $-a = \rho_i(-a_i)$.

- L'opération $+$ sur G est bien associative puisque l'addition dans chaque G_i l'est et la composition de fonctions l'est aussi.

On a donc un groupe abélien G en bonne et due forme et les ρ_i sont bien évidemment des homomorphismes de groupes.

On doit vérifier maintenant que le groupe G et les morphismes $\rho_i : G_i \to G$ satisfont la définition de limite inductive.

Quand $i \leq j$, on a bien $\rho_i \circ \rho_i^j = \rho_j$. En effet, pour tout $a \in G_j$, $\rho_i^j(a) = \rho_i^i \circ \rho_i^j(a)$ donc $a \backsim \rho_i^j(a)$ d'où $\rho_j(a) = \rho_i(\rho_i^j(a))$.

Soit H un groupe abélien et $h_i : G_i \to H$ tels que $h_j = h_i \circ \rho_i^j$ pour $i \leq j$. Pour tout $g \in G$, il existe $i \in I$ et $a \in G_i$ tel que $g = \rho_i(a)$. On cherche $h : G \to H$ tel que pour tout $j \in I$, $h \circ \rho_j = h_j$. Si un tel h existe, on doit avoir $h(g) = h_i(a)$. Donc si h existe, il est bien unique.

Montrons donc que h est bien défini. Si $\rho_i(a) = \rho_j(b)$, on a que $a \backsim b$ c'est-à-dire qu'il existe $k \in I$ avec $k \leq i$ et $k \leq j$ et $\rho_k^i(a) = \rho_k^j(b)$. On a donc $h_i(a) = h_k \circ \rho_k^i(a) = h_k \circ \rho_k^j(b) = h_j(b)$ donc h est bien défini. ■

Supposons qu'on ait des systèmes inductifs

$$\mathcal{A} = \Big((A_i)_{i\in I}, (\alpha_i^j)_{i\leq j}\Big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = \Big((B_i)_{i\in I}, (\beta_i^j)_{i\leq j}\Big)$$

et que pour chaque $i \in I$, on ait des morphismes $f_i : A_i \to B_i$ tels que pour tout couple $(i,j) \in I^2$ où $i \leq j$, on ait $\beta_i^j \circ f_j = f_i \circ \alpha_i^j$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\alpha_i^j"'] & B_j \arrow[d, "\beta_i^j"] \\
A_i \arrow[r, "f_i"] & B_i
\end{tikzcd}$$

Si $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$ est la limite inductive du système inductif $\mathcal{A}$ et $(B, (\beta_i)_{i\in I})$ est la limite inductive du système inductif $\mathcal{B}$, on sait par définition de limite inductive qu'il existe un unique morphisme $f : A \to B$ tel que pour tout $i \in I$, $f \circ \alpha_i = (\beta_i \circ f_i)$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & B_i \arrow[dr, "\beta_i"] & \\ & A \arrow[r, dotted, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

On note alors $f = \varinjlim f_i$ et on dit que f est la limite inductive des morphismes (f_i). Voici un théorème qui relie l'exactitude d'une suite de morphismes à l'exactitude d'une suite limite. On l'utilisera plus tard pour montrer l'exactitude d'une longue suite exacte en cohomologie.

Théorème 2.2.3 (Suite exacte de limites inductives) *Soient* $\Big((A_i)_{i\in I}, (\alpha_i^j)_{i\leq j}\Big)$, $\Big((B_i)_{i\in I}, (\beta_i^j)_{i\leq j}\Big)$ *et* $\Big((C_i)_{i\in I}, (\gamma_i^j)_{i\leq j}\Big)$ *trois systèmes inductifs dont les limites sont respectivement* $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$, $(B, (\beta_i)_{i\in I})$ *et* $(C, (\gamma_i)_{i\in I})$. *Soient* $(f_i : A_i \to B_i)_{i\in I}$ *et* $(g_i : B_i \to C_i)_{i\in I}$ *des familles de morphismes telles que, pour tout couple* $(i, j) \in I^2$ *où* $i \leq j$, *on ait le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\alpha_i^j"'] & B_j \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, "\beta_i^j"] & C_j \arrow[d, "\gamma_i^j"] & (E_j) \\ A_i \arrow[r, "f_i"] & B_i \arrow[r, "g_i"] & C_i & (E_i) \end{tikzcd}$$

Supposons que pour tout $i \in I$, *il existe un* $k \in I$ *tel que* $k \leq i$ *et* E_k *soit exacte en* B_k. *Alors la suite* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, *où* $f = \varinjlim f_i$ *et* $g = \varinjlim g_i$, *est exacte en* B.

Preuve

1. $\underline{\ker(f) \subset \operatorname{Im}(g)}$: Soit $b \in \ker(g)$. Soit $b_i \in B_i$ tel que $\beta_i(b_i) = b$. On a alors $\gamma_i(g_i(b_i)) = g(\beta_i(b_i)) = g(b) = 0$. Donc il existe $j \in I$ tel que $j \leq i$ et $\gamma_j^i(g_i(b_i)) = 0 \in C_j$ par la construction explicite de $\varinjlim$. On sait qu'il existe $k \leq j$ tel que E_k est exacte en B_k. Puisque

$$g_k(\beta_k^i(b_i)) = \gamma_k^i(g_i(b_i)) = \gamma_k^j \circ \gamma_j^i(g_i(b_i)) = 0$$

et que E_k est exacte en B_k, on sait qu'il y a un $a_k \in A_k$ tel que $f_k(a_k) = \beta_k^i(b_i)$ d'où on obtient

$$f(\alpha_k(a_k)) = \beta_k \circ f_k(a_k) = \beta_k \circ \beta_k^i(b_i) = \beta_i(b_i) = b$$

et $b \in \mathrm{Im}(f)$.

2. $\underline{\ker(f) \supset \mathrm{Im}(g)}$: Soit $b \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Soit $i \in I$ tel que $a_i \in A_i$ et $\alpha_i(a_i) = a$. On a alors $\beta_i(f_i(a_i)) = f(\alpha_i(a_i)) = f(a) = b$. On sait par hypothèse qu'il existe $k \in I$ tel que $k \leq i$ et E_k est exacte en B_k. Donc

$$g(b) = g \circ \beta_i \circ f_i(a_i) = g \circ \beta_k \circ \beta_k^i \circ f_i(a_i) = \gamma_k \circ g_k \circ \beta_k^i \circ f_i(a_i) = \gamma_k \circ (g_k \circ f_k) \circ \alpha_k^i(a_i) = 0$$

et $b \in \ker(g)$.

■

2.2.2 Les morphismes $\varphi_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}}$ et le système inductif des $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$

Dans cette section nous décrivons le système inductif qui nous intéresse pour définir $\mathrm{H}^q(X, \mathfrak{F})$.

Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau sur X. Soit $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{U}$ deux recouvrements de X. On dit que $\mathfrak{V}$ est *plus fin* que $\mathfrak{U}$ et on écrit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathfrak{V}$, il existe $U \in \mathfrak{U}$ tel que $V \subset U$. Pour deux recouvrements $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{U}$ de X, on notera $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ si pour tout $V \in \mathfrak{V}$, il existe un $U \in \mathfrak{U}$ tel que $V \Subset U$. (Pour la notation $\Subset$, voir section 1.1.)

En d'autres termes, si $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ et $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ alors il existe une fonction $\tau : J \to I$ telle que $V_j \subset U_{\tau j}$. Cette fonction, qu'on pourrait appeller de raffinement, nous permet de définir

$$\begin{aligned} \tau^q : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) &\longrightarrow C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \\ (f_{i_0 \cdots i_q}) &\mapsto (g_{j_0 \cdots j_q}) \end{aligned}$$

où

$$g_{j_0 \cdots j_q} := f_{\tau j_0 \cdots \tau j_q}\Big|_{V_{j_0 \cdots j_q}}.$$

Il faut noter que cette fonction n'est pas nécessairement unique.

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \arrow[r] & C^{q}(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \arrow[r] & C^{q+1}(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \arrow[r] \arrow[u, "\tau^{q-1}"] & C^{q}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \arrow[r] \arrow[u, "\tau^{q}"] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \arrow[r] \arrow[u, "\tau^{q+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes de cobords.

Puisqu'elle envoie les cobords dans les cobords $\Big(\tau^q\Big(B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\Big) \subset B^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})\Big)$ et les cocyles dans les cocycles de $\Big(\tau^q\Big(Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\Big) \subset Z^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})\Big)$ comme le suggère le diagramme ci-dessus, cette fonction induit une fonction $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$.

Théorème 2.2.4 *Soit $\tau, \widetilde{\tau} : J \to I$ deux fonctions telles que $V_j \subset U_{\tau j} \cap U_{\widetilde{\tau} j}$. Ces deux fonctions induisent la même fonction*

$$\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : \mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$$

Preuve On va définir une famille de fonctions $(h^q)_{q\geq 0}$, $h^q : C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to C^{q-1}(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$ par

$$\Big(h^q(f)\Big)_{j_0\cdots j_{q-1}} = \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k f_{\tau j_0\cdots\tau j_k \widetilde{\tau} j_k\cdots\widetilde{\tau} j_{q-1}}\Big|_{V_{j_0\cdots j_{q-1}}}$$

pour $f \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ et $q \geq 1$ et $h^0 = 0$.

La famille de fonctions $(h^q)_{q\geq 0}$ est ce qu'on appelle une « homotopie » entre $(\tau^q)_{q\geq 0}$ et $(\widetilde{\tau}^q)_{q\geq 0}$, c'est-à-dire

$$\widetilde{\tau}^q - \tau^q = h^{q+1} \circ \delta^q + \delta^{q-1} \circ h^q$$

En effet, $\Big(\delta^q(f)\Big)_{i_0\cdots i_{q+1}} = \sum_{\ell=0}^{q+1}(-1)^\ell f_{i_0\cdots\widehat{i_\ell}\cdots i_{q+1}}\Big|_{U_{j_0\cdots j_{q+1}}}$ donc

$$\Big(h^{q+1}\circ\delta^q(f)\Big)_{j_0\cdots j_q} = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\Big(\delta^q(f)\Big)_{\tau j_0\cdots\tau j_k\widetilde{\tau} j_k\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\left(\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell f_{\tau j_0\cdots\widehat{\tau j_\ell}\cdots\tau j_k\widetilde{\tau} j_k\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\sum_{\ell=k}^{q}(-1)^{\ell+1} f_{\tau j_0\cdots\tau j_k\widetilde{\tau} j_k\cdots\widehat{\widetilde{\tau} j_\ell}\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}\right)\\
&= \sum_{\ell\leq k}(-1)^{k+\ell} f_{\tau j_0\cdots\widehat{\tau j_\ell}\cdots\tau j_k\widetilde{\tau} j_k\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}\\
&\quad +\sum_{\ell\geq k}(-1)^{k+\ell+1} f_{\tau j_0\cdots\tau j_k\widetilde{\tau} j_k\cdots\widehat{\widetilde{\tau} j_\ell}\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Big(\delta^{q-1}\circ h^q(f)\Big)_{j_0\cdots j_q} &= \sum_{\ell=0}^{q}(-1)^\ell\Big(h^q(f)\Big)_{j_0\cdots\widehat{j_\ell}\cdots j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}\\
&= \sum_{k<\ell}(-1)^{\ell+k} f_{\tau j_0\cdots\tau j_k\widetilde{\tau} j_k\cdots\widehat{\widetilde{\tau} j_\ell}\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}\\
&\quad +\sum_{k>\ell}(-1)^{\ell+k-1} f_{\tau j_0\cdots\widehat{\tau j_\ell}\cdots\tau j_k\widetilde{\tau} j_k\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\Big(h^{q+1}\circ\delta^q(f)+\delta^{q-1}\circ h^q(f)\Big)_{j_0\cdots j_q} &= \sum_{\ell} f_{\tau j_0\cdots\widehat{\tau j_\ell}\widetilde{\tau} j_\ell\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}\\
&\quad -\sum_{\ell} f_{\tau j_0\cdots\tau j_\ell\widehat{\widetilde{\tau} j_\ell}\cdots\widetilde{\tau} j_q}\Big|_{V_{j_0\cdots j_q}}\\
&= f_{\widetilde{\tau} j_0\cdots\widetilde{\tau} j_q}+f_{\tau j_0\widetilde{\tau} j_1\cdots\widetilde{\tau} j_q}+\cdots+f_{\tau j_0\cdots\tau j_{q-1}\widetilde{\tau} j_q}\\
&\quad -f_{\tau j_0\widetilde{\tau} j_1\cdots\widetilde{\tau} j_q}-\cdots-f_{\tau j_0\cdots\tau j_{q-1}\widetilde{\tau} j_q}-f_{\tau j_0\cdots\tau j_q}\\
&= f_{\widetilde{\tau} j_0\cdots\widetilde{\tau} j_q}-f_{\tau j_0\cdots\tau j_q}\\
&= \Big(\widetilde{\tau}^q(f)-\tau^q(f)\Big)_{j_0\cdots j_q}
\end{aligned}
$$

Puisque les fonctions $\widetilde{\tau}^q$ et τ^q sont si bien reliées, elles induisent la même fonction $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\to\mathrm{H}^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$. En effet, pour $f\in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, on a

$$
\Big(\widetilde{\tau}^q-\tau^q\Big)(f)=\Big(h^{q+1}\circ\delta^q\Big)(f)+\Big(\delta^{q-1}\circ h^q\Big)(f)=\Big(\delta^{q-1}\circ h^q\Big)(f)\in B^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F}).
$$

■

Si $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in I}$ et $\mathfrak{V}=(V_j)_{j\in J}$ sont deux recouvrements de X, on peut construire le recouvrement $\mathfrak{W}=(U_i\cap V_j)_{(i,j)\in I\times J}$. Ce recouvrement est tel que $\mathfrak{W}<\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{W}<\mathfrak{V}$.

Par ailleurs, si $\mathfrak{W} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ sont trois recouvrements de X, on a bien $\varphi^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} \circ \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}$. En effet, pour réaliser $\varphi^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} \circ \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$, on utilise dex fonctions de raffinement pour $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ et $\mathfrak{W} < \mathfrak{V}$, ce qui nous donne une fonction de raffinement pour $\mathfrak{W} < \mathfrak{U}$. La donnée des groupes $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ pour tous les recouvrements ouverts $\mathfrak{U}$ de X et la donnée des morphismes $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ constituent un système inductif. C'est de ce système qu'il faut faire la limite inductive pour obtenir le q-ième groupe de cohomologie $\mathrm{H}^q(X, \mathfrak{F})$ de X à coefficients dans le préfaisceau $\mathfrak{F}$.

2.3 Morphismes de préfaisceaux

Évidemment, dès qu'on voudra faire quelque chose d'intéressant, on va devoir étudier plusieurs préfaisceaux et les relations entre ceux-ci.

Définition 2.3.1 (Morphisme de préfaisceaux) *Si $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des préfaisceaux de groupes abéliens, un* morphisme de préfaisceaux $\phi : \mathfrak{F} \to \mathcal{G}$ *est la donnée pour tout ouvert U de X d'un morphisme de groupes $\alpha_U : \mathfrak{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ tels que si $U_1 \subset U_2$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(U_2) \arrow[r, "\alpha_{U_2}"] \arrow[d, "\rho^{U_2}_{U_1}"'] & \mathcal{G}(U_2) \arrow[d, "\rho^{U_2}_{U_1}"] \\ \mathfrak{F}(U_1) \arrow[r, "\alpha_{U_1}"'] & \mathcal{G}(U_1) \end{tikzcd}$$

Pour simplifier l'écriture, il nous arrivera souvent d'écrire simplement α pour dénoter α_U pour un ouvert U de X. Si $\alpha : \mathfrak{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de préfaisceaux, on a un homomorphisme de groupes $\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}} : \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ pour tout $q \geq 0$ et tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X. Pour $f \in Z^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, On pose

$$\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}\left(f + B^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})\right) = \alpha^q(f) + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$$

où $(\alpha^q(f))_{i_0 \cdots i_q} = \alpha(f_{i_0 \cdots i_q})$. La cochaîne $\alpha^q(f)$ est bien un cocycle car

$$\Big(\delta(\alpha^q(f))\Big)_{i_0 \cdots i_{q+1}} = \sum_{l=0}^{q+1} (-1)^l \alpha(f_{i_0 \cdots \widehat{i_l} \cdots i_{q+1}}) = \alpha\left(\sum_{l=0}^{q+1} (-1)^l f_{i_0 \cdots \widehat{i_l} \cdots i_{q+1}}\right) = \alpha(0) = 0$$

et si $f \in B^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, c'est-à-dire si $f = \delta^{q-1}(g)$ pour $g \in C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, on a

$$\alpha^q(f) = \delta^{q-1}\big(\alpha^{q-1}(g)\big)$$

Donc $\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}$ est bien défini.

Si $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$ sont deux recouvrements de X, on a naturellement $\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}'} \circ \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{U}'} = \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{U}'} \circ \overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}$. On a donc un morphisme de groupes bien défini

$$\overline{\alpha} : \mathrm{H}^q(X, \mathfrak{F}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathcal{G})$$

où

$$\overline{\alpha}\left(\varphi_{\mathfrak{U}}(c)\right) = \varphi_{\mathfrak{U}} \circ \overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}(c) \quad \text{si } c \in \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$$

c'est-à-dire $\overline{\alpha} = \varinjlim \overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}$ comme on l'a défini à la section 2.2.1.

2.4 Suites exactes... ou presque

Pour définir la notion d'exactitude d'une suite de préfaisceaux, il faudrait quelques pages de discussion supplémentaires. Au delà de ce travail, la seule chose qui nous attend est un beau théorème sur les suites exactes en cohomologie. Pour alléger la discussion, nous allons plutôt éviter de définir la notion de fibre de préfaisceaux qui est essentielle pour une définition complète de la notion de suite exacte de préfaisceaux. Pour ce faire, nous devrons poser une condition, qui peut sembler artificielle, à l'existence d'une longue suite exacte en cohomologie.

Pour comprendre la preuve du théorème de Riemann-Roch, il est suffisant de connaître l'énoncé du théorème principal de cette section (théorème 2.4.1), c'est-à-dire l'existence d'une longue suite exacte en cohomologie, sans vraiment connaître intimement les morphismes entre les groupes composant cette suite. Nous suggérons donc au lecteur de lire l'énoncé de ce théorème et de ne lire le reste de cette section que s'il a des doutes. On peut donc passer directement à la section suivante en page 44 après la lecture de l'énoncé du théorème qui suit.

Théorème 2.4.1 (Longue suite exacte en cohomologie) *Soient $\mathfrak{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des préfaisceaux sur un espace topologique X et $\alpha : \mathfrak{F} \to \mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ des morphismes de préfaisceaux. Si pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X il existe un recouvrement $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$ tel que pour toute intersection finie W d'ouverts de $\mathfrak{U}'$, la suite*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(W) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(W) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(W) \longrightarrow 0$$

est exacte alors la suite infinie

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathrm{H}^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\overline{\beta}} \mathrm{H}^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^1(X,\mathfrak{F}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^q(X,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathrm{H}^q(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\overline{\beta}} \mathrm{H}^q(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathfrak{F}) \longrightarrow \cdots$$

où Δ est l'homomorphisme de connexion qu'on définira plus tard, est exacte.

L'homomorphisme de connexion

Bien qu'on n'ait pas besoin de connaître Δ personnellement pour utiliser le théorème 2.4.1, nous aurons besoin de sa définition pour prouver ce même théorème. Définissons-le donc ici. C'est un homomorphisme

$$\mathrm{H}^q(X,\mathcal{H}) \to \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathfrak{F})$$

qu'on obtient à l'aide de la suite $0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ en utilisant le fait qu'elle satisfait aux hypothèses du théorème 2.4.1.

Si $\overline{h} \in \mathrm{H}^q(X,\mathcal{H})$, supposons $\overline{h} = \varphi_{\mathfrak{U}}(\widetilde{h})$ pour $\widetilde{h} \in \mathrm{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{H})$. On peut trouver $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$ tel que toute intersections W d'ouverts de $\mathfrak{U}'$ soit telle que la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(W) \xrightarrow{\alpha_W} \mathcal{G}(W) \xrightarrow{\beta_W} \mathcal{H}(W) \longrightarrow 0$$

soit exacte. On a donc $\overline{h} = \varphi_{\mathfrak{U}'}(h')$ où $h' = \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{U}'}(\widetilde{h}) \in \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}',\mathcal{H})$.

On peut écrire $h' = h + B^q(\mathfrak{U}', \mathcal{H})$ pour $h = (h_{i_0\cdots i_q}) \in Z^q(\mathfrak{U}', \mathcal{H})$. Puisque β surjectif sur les intersections d'ouverts de $\mathfrak{U}'$, il existe une cochaîne $g = (g_{i_0\cdots i_q}) \in C^q(\mathfrak{U}', \mathcal{G})$ telle que $\beta^q(g_{i_0\cdots i_q}) = h_{i_0\cdots i_q}$. Puisque $(h_{i_0\cdots i_q}) \in Z^q(\mathfrak{U}', \mathcal{H})$, on a

$$\begin{aligned}
\beta\left(\sum_{\ell=0}^{q+1}(-1)^\ell g_{i_0\cdots\widehat{i_\ell}\cdots i_{q+1}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+1}}}\right) &= \sum_{\ell=0}^{q+1}(-1)^\ell \beta\left(g_{i_0\cdots\widehat{i_\ell}\cdots i_{q+1}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+1}}}\right) \\
&= \big(\delta(h)\big)_{i_0\cdots i_{q+1}} = 0
\end{aligned}$$

où ici $\beta = \beta_{U_{i_0\cdots i_{q+1}}}$ en vertu de la convention d'écriture donnée à la section 2.3. Donc, il existe $f_{i_0\cdots i_{q+1}} \in \mathfrak{F}(U_{i_0\cdots i_{q+1}})$ tel que $\alpha(f_{i_0\cdots i_{q+1}}) = \sum_{\ell=0}^{q+1}(-1)^\ell g_{i_0\cdots\widehat{i_\ell}\cdots i_{q+1}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+1}}}$, puisque $\ker(\beta_{U_{i_0\cdots i_{q+1}}}) = \mathrm{Im}(\alpha_{U_{i_0\cdots i_{q+1}}})$.

Si on pose $f := (f_{i_0\cdots i_{q+1}})$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha\Big(\big(\delta(f)\big)_{i_0\cdots i_{q+2}}\Big) &= \alpha\left(\sum_{k=0}^{q+2}(-1)^k f_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{q+2}(-1)^k \alpha(f_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_{q+2}})\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}} \\
&= \sum_{k<\ell}(-1)^{k+\ell-1} g_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots\widehat{i_\ell}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}} \\
&\quad + \sum_{k>\ell}(-1)^{k+\ell} g_{i_0\cdots\widehat{i_\ell}\cdots\widehat{i_k}\cdots i_{q+2}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{q+2}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, α étant injectif, on a

$$f \in Z^{q+1}(\mathfrak{U}', \mathfrak{F}).$$

Posons $\Delta_{\mathfrak{U}}(h) = f + B^{q+1}(\mathfrak{U}', \mathfrak{F})$ et, comme on a fait plus tôt,

$$\Delta(\overline{h}) = \varphi'_{\mathfrak{U}}(\Delta_{\mathfrak{U}}(h)),$$

c'est-à-dire que $\Delta = \varinjlim \Delta_{\mathfrak{U}}$. On peut montrer que Δ est bien défini malgré les nombreux choix qu'on a pu faire.

Montrons maintenant le théorème qui prédit l'existence de la longue suite exacte en cohomologie.

Preuve (théorème 2.4.1) Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X pour lequel chacune des intersections finies W d'ouverts le composant rend la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(W) \longrightarrow \mathcal{G}(W) \longrightarrow \mathcal{H}(W) \longrightarrow 0$$

exacte. La suite associée

$$0 \longrightarrow C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha^q} C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^q} C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

est donc exacte pour tout q. (Revoir la définition de $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ en page 28.)

Considérons la suite associée

$$\longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}} \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\overline{\beta}_{\mathfrak{U}}} \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\Delta_{\mathfrak{U}}} \mathrm{H}^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow$$

On va montrer, en 6 étapes, qu'elle est exacte

1. $\underline{\ker(\Delta_{\mathfrak{U}}) \subset \mathrm{Im}(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}})}$: Soit $h \in Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ tel que $h + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \in \ker(\Delta_{\mathfrak{U}})$. Il existe $g \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ tel que $\beta^q(g) = h$ et $f \in C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ tel que $\alpha^{q+1}(f) = \delta(g)$. Par définition de $\Delta_{\mathfrak{U}}$, $\Delta_{\mathfrak{U}}(h + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H})) = f + B^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ donc $f \in B^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Il existe donc $f' \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ tel que $\delta(f') = f$ d'où $\delta(g) = \alpha^{q+1}(f) = \alpha^{q+1} \circ \delta(f') = \delta(\alpha^q(f'))$ ce qui nous donne $g - \alpha^q(f') \in Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$. On a donc, puisque $\mathrm{Im}(\alpha^q) = \ker(\beta^q)$,

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_{\mathfrak{U}}(g - \alpha^q(f') + B^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})) &= \beta^q(g) - \beta^q\alpha^q(f') + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \\ &= h - 0 + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \\ &= h + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

   c'est-à-dire $h + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \in \mathrm{Im}(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}})$.

2. $\underline{\ker(\Delta_{\mathfrak{U}}) \supset \mathrm{Im}(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}})}$: Soit $x \in \mathrm{Im}(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}})$. Soit $g \in Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ tel que $x = \beta^q(g) + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \in \mathrm{Im}(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}})$. On a donc $\Delta_{\mathfrak{U}}(\beta^q(g) + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H})) = 0 + B^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ car $\alpha^{q+1}(0) = 0 = \delta(g)$ d'où $x = \beta^q(g) + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \in \ker(\Delta_{\mathfrak{U}})$.

3. $\underline{\ker(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}}) \subset \mathrm{Im}(\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}})}$: Si $g \in Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ et $g + B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \in \ker(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}})$, on a $\beta^q(g) \in B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ donc il existe $h' \in C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ tel que $\delta(h') = \beta^q(g)$. Puisque β^{q-1} est

surjective, il existe $g' \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ tel que $\beta^{q-1}(g') = h'$. On a $\beta^q(g-\delta(g')) = \beta^q(g) - \delta\beta^{q-1}(g') = \delta(h'-h') = 0$ donc, puisque $\mathrm{Im}(\alpha^q) = \ker(\beta^q)$, il existe $f \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ tel que $\alpha^q(f) = g - \delta(g')$. Pour voir que $\delta(f) = 0$ (ou, de façon synonyme que $f \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$), utilisons l'injectivité de α^{q+1} en ne prouvant que $\alpha^{q+1}\circ\delta(f) = 0$. Rien de plus facile car $\alpha^{q+1}\circ\delta(f) = \delta\circ\alpha^q(f) = \delta(g) - \delta\delta(g') = 0$, g étant un cocyle. Donc

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}\left(f + B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\right) &= \alpha^q(f) + B^q(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \\ &= g - \delta(g') + B^q(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \\ &= g + B^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})\end{aligned}$$

c'est-à-dire $g + B^q(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \in \mathrm{Im}(\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}})$.

4. $\underline{\ker(\overline{\beta}_{\mathfrak{U}}) \supset \mathrm{Im}(\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}})}$: Si $f \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$,

$$\begin{aligned}\overline{\beta}_{\mathfrak{U}}\circ\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}\left(f + B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\right) &= \beta^q\circ\alpha^q(f) + B^q(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \\ &= B^q(\mathfrak{U},\mathcal{H})\end{aligned}$$

car $\mathrm{Im}(\alpha^q) = \ker(\beta^q)$.

5. $\underline{\ker(\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}) \subset \mathrm{Im}(\Delta_{\mathfrak{U}})}$: Soit $f \in Z^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ tel que $\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}\left(f + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\right) = 0$ c'est-à-dire $\alpha^{q+1}(f) \in B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{G})$. On a donc $g \in C^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ tel que $\delta(g) = \alpha^{q+1}(f)$. On a $\delta(\beta^q(g)) = \beta^{q+1}(\delta(g)) = \beta^{q+1}\circ\alpha^{q+1}(f) = 0$ car $\ker(\beta^{q+1}) = \mathrm{Im}(\alpha^{q+1})$. On a donc $\beta^q(g) \in Z^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})$. Par définition de $\Delta_{\mathfrak{U}}$, on a

$$\Delta_{\mathfrak{U}}\left(\beta^q(g) + B^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})\right) = f + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

c'est-à-dire $f + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \in \mathrm{Im}(\Delta_{\mathfrak{U}})$.

6. $\underline{\ker(\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}) \supset \mathrm{Im}(\Delta_{\mathfrak{U}})}$: Soit $f \in Z^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ et $f + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \in \mathrm{Im}(\Delta_{\mathfrak{U}})$ Par définition de $\Delta_{\mathfrak{U}}$, on a $h \in Z^q(\mathfrak{U},\mathcal{H})$ et $g \in C^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ tels que $\alpha^{q+1}(f) = \delta(g)$ et $\beta^q(g) = h$. On a donc évidemment

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}\Big(f + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\Big) &= \alpha^{q+1}(f) + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \\ &= \delta(g) + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \\ &= B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{G})\end{aligned}$$

c'est-à-dire $f + B^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \in \ker(\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}})$.

Puisque nos systèmes inductifs $\left((\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \cdot))_{\mathfrak{U}}, (\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{V}<\mathfrak{U}}\right)$ satisfont les hypothèses du théorème 2.2.3, la preuve se termine ici. ■

2.5 Calcul de $\mathrm{H}^0(X, \mathfrak{F})$

Comme nous allons le voir dans quelques instants, dans la plupart des cas le 0-ième groupe de cohomologie est d'une simplicité désarmante. En effet, dans la presque totalité des cas avec lesquels nous aurons à travailler, nos préfaisceaux sont beaucoup plus rigides qu'un préfaisceau quelconque, la plupart sont en fait des faisceaux, ce qu'on définit à l'instant.

Définition 2.5.1 (Faisceau) *Un préfaisceau $\mathfrak{F}$ sur X est appellé un* faisceau *s'il satisfait la propriété suivante: si $f_i \in \mathfrak{F}(U_i)$ pour une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X et qu'on a $f_i\Big|_{U_i\cap U_j} = f_j\Big|_{U_i\cap U_j}$ pour tout $i, j \in I$, alors il existe un unique $f \in \mathfrak{F}(\bigcup_{i\in I} U_i)$ tel que pour tout $i \in I$, $f\Big|_{U_i} = f_i$.*

Si $\mathfrak{F}$ est un préfaisceau sur X et $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X, pour tout $(f_i) \in Z^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, on a $f_i\Big|_{U_i\cap U_j} = f_j\Big|_{U_i\cap U_j}$ car $\delta(f_i) = 0$. On a donc, si $\mathfrak{F}$ est en plus un faisceau, qu'il existe un unique $\varphi_{\mathfrak{U}}(f_i) \in \mathfrak{F}(X)$ tel que $\varphi_{\mathfrak{U}}(f_i)\Big|_{U_i} = f_i$. $\varphi_{\mathfrak{U}}$ ainsi défini est bien un morphisme $Z^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(X)$. Puisque $B^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = 0$, on a $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ et un morphisme canonique $\varphi_{\mathfrak{U}} : \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(X)$.

Si $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$, on a bien évidemment que $\varphi_{\mathfrak{U}} = \varphi_{\mathfrak{U}'} \circ \varphi_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}}$.

On veut montrer que $\mathfrak{F}(X)$ est la limite inductive des $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Supposons tout d'abord qu'on a un groupe G, et pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, un morphisme $\psi_{\mathfrak{U}} : \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to G$. Supposons par ailleurs que ces morphismes satisfont $\psi_{\mathfrak{U}} = \psi_{\mathfrak{U}'} \circ \varphi_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}}$ quand $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$. Dans cette situation, s'il existe un $\psi : \mathfrak{F}(X) \to G$ tel que $\psi_{\mathfrak{U}} = \psi \circ \varphi_{\mathfrak{U}}$ pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$, alors on doit avoir $\forall \mathfrak{U}$, $\forall f \in \mathfrak{F}(X)$, $\psi(f) = \psi_{\mathfrak{U}}((f\Big|_{U_i})_{i\in I})$, c'est-à-dire que ψ doit être unique.

Soit $\mathfrak{U} := (U_i)_{i\in I}$ et $\mathfrak{U}' := (U_i')_{i\in I'}$ deux recouvrements de X et soit $\mathfrak{U}'' := (U_i'')_{i\in I''}$ un recouvrement plus fin que les deux précédents, c'est-à-dire $\mathfrak{U}'' < \mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'' < \mathfrak{U}'$. On a

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathfrak{U}}((f\big|_{U_i})_{i\in I}) &= \psi_{\mathfrak{U}''} \circ \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{U}''}((f\big|_{U_i})_{i\in I}) \\
&= \psi_{\mathfrak{U}''}((f\big|_{U_i''})_{i\in I''}) \\
&= \psi_{\mathfrak{U}''} \circ \varphi^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{U}''}((f\big|_{U_i'})_{i\in I'}) \\
&= \psi_{\mathfrak{U}'}((f\big|_{U_i'})_{i\in I'})
\end{aligned}$$

donc ψ est bien défini et $\mathfrak{F}(X)$ est bien la limite inductive des $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. On a donc prouvé le théorème suivant

Théorème 2.5.2 *Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau sur X, on a*

$$\mathrm{H}^0(X, \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(X).$$

■

2.6 Calcul de $\mathrm{H}^q(X, \mathfrak{C})$, $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O})$ et $\mathrm{H}^q(X, \mathbb{C}_p)$

Cette section est consacrée au calcul de certains groupes de cohomologie avec lesquels on a à travailler dans ce mémoire.

Théorème 2.6.1 (Cohomologie des fonctions C^∞) *Soit X une surface de Riemann, on a pour $q \geq 1$*

$$\mathrm{H}^q(X, \mathfrak{C}) = 0$$

Preuve Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathfrak{U}$. (voir appendice A de (Forster, 1981) ou n'importe quel livre de géométrie différentielle comme (Warner, 1983) pour l'existence de partitions de l'unité.) Une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathfrak{U}$ est une famille de fonctions $\psi_i : X \to \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall i \in I \quad \mathrm{Supp}(\psi_i) \subset U_i$

2. $\forall x \in X\ \exists U$ ouvert de X, $x \in U$ tel que $\{i \mid U \cap \mathrm{Supp}(\psi_i) \neq \varnothing\}$ est fini

3. $\forall x \in X \quad \sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1.$

Soit $(f_{i_0 \cdots i_q}) \in Z^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$. Puisque $\mathrm{Supp}(\psi_{i_q}) \subset U_{i_q}$, on peut étendre $\psi_{i_q} f_{i_0 \cdots i_q}$, qui n'est définie autrement que sur $U_{i_0 \cdots i_q}$, à tout $U_{i_0 \cdots i_{q-1}}$ en lui donnant la valeur zéro hors de $U_{i_0 \cdots i_q}$. On peut donc voir $\psi_{i_q} f_{i_0 \cdots i_q}$ comme un élément de $\mathfrak{C}(U_{i_0 \cdots i_{q-1}})$. Posons

$$g_{i_0 \cdots i_{q-1}} := \sum_{k \in I} \psi_k f_{i_0 \cdots i_{q-1} k} \in \mathfrak{C}(U_{i_0 \cdots i_{q-1}})$$

Sur $U_{i_0 \cdots i_q}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{\ell} g_{i_0 \cdots \widehat{i_\ell} \cdots i_q} &= \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{\ell} \sum_{k \in I} \psi_k f_{i_0 \cdots \widehat{i_\ell} \cdots i_q k} \\
&= \sum_{k \in I} \psi_k \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{\ell} f_{i_0 \cdots \widehat{i_\ell} \cdots i_q k} \\
&= \sum_{k \in I} \psi_k (-1)^q f_{i_0 \cdots i_q} \qquad \text{car } (f_{i_0 \cdots i_q}) \in Z^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}) \\
&= (-1)^q f_{i_0 \cdots i_q}
\end{aligned}$$

Donc $(f_{i_0 \cdots i_q}) = \delta((-1)^q (g_{i_0 \cdots i_q}))$ et ainsi $Z^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}) = B^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$. Le recouvrement $\mathfrak{U}$ étant quelconque, on a $\mathrm{H}^q(X, \mathfrak{C}) = 0$. ∎

En appliquant exactement les mêmes méthodes, on a

Théorème 2.6.2 (Cohomologie des formes C^∞ de type (1,0) et (0,1)) *Soit X une surface de Riemann, on a pour $q \geq 1$*

$$\mathrm{H}^q(X, \mathfrak{C}^{1,0}) = \mathrm{H}^q(X, \mathfrak{C}^{0,1}) = 0.$$

∎

La puissance des partitions de l'unité nous a permis d'obtenir ces résultats. Quand on regarde les choses d'un point de vue holomorphe, on ne dispose pas d'outil si puissant.

Cependant, parce qu'on joue avec des variétés complexes de dimension 1, ce qu'on appelle dans ce mémoire des surfaces de Riemann, on a tout de même le résultat suivant:

Théorème 2.6.3 (Cohomologie des fonctions holomorphes) *Soit X une surface de Riemann, on a pour $q \geq 2$*

$$\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}) = 0$$

Preuve Pour un ouvert de carte U sur X, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathfrak{E}(U) \xrightarrow{\mathrm{d}''} \mathfrak{E}^{0,1}(U) \longrightarrow 0 \qquad (D)$$

est exacte. En effet, on sait que $g \in \mathfrak{E}(U)$ est en fait dans $\mathcal{O}(U)$ si et seulement si $\partial g/\partial \overline{z} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{d}''g = 0$. La suite est donc exacte en $\mathfrak{E}(U)$, Le fait qu'elle soit exacte en $\mathcal{O}(U)$ n'a rien de surprenant puisque $\mathcal{O}(U) \subset \mathfrak{E}(U)$. Par le lemme de Dolbeault, pour $g \in \mathfrak{E}(U)$, il existe $f \in \mathfrak{E}(U)$ avec $\mathrm{d}''f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z} = g\mathrm{d}\overline{z}$ donc d'' est surjective ce qui nous permet de conclure que D est exacte pour un ouvert de carte U.

Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement quelconque de X, on peut trouver un recouvrement $\mathfrak{U}'$ de X plus fin que $\mathfrak{U}$ composé d'ouverts de cartes. On a donc $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$ tel que la suite D soit exacte pour tout $U \in \mathfrak{U}'$. Les intersections d'ouverts de carte étant elles-mêmes des ouverts de cartes, le théorème 2.4.1 nous garantit l'existence d'une longue suite exacte

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{q-1}(X, \mathfrak{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^{q-1}(X, \mathfrak{E}^{0,1}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathfrak{E}) \longrightarrow \cdots$$

Pour $q \geq 2$, on a donc par les théorèmes 2.6.1 et 2.6.2 la suite exacte

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{q-1}(X, \mathfrak{E}) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathrm{H}^{q-1}(X, \mathfrak{E}^{0,1}) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathrm{H}^q(X, \mathfrak{E}) \arrow[d, "="'] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où la conclusion. ∎

Théorème 2.6.4 ($\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O})$ pour un ouvert X de $\mathbb{C}$) *Pour un ouvert X de $\mathbb{C}$,*

$$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) = 0$$

Preuve La longue suite exacte utilisée dans la preuve du théorème 2.6.3 nous donne la suite exacte

$$\mathrm{H}^0(X, \mathfrak{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathfrak{E}^{0,1}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathfrak{E})$$

or, par le théorème 2.6.1, $\mathrm{H}^1(X, \mathfrak{E}) = 0$ et par le théorème 2.5.2, $\mathrm{H}^0(X, \mathfrak{E}) = \mathfrak{E}(X)$ et $\mathrm{H}^0(X, \mathfrak{E}^{0,1}) = \mathfrak{E}^{0,1}(X)$, d'où la suite exacte

$$\mathfrak{E}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}''} \mathfrak{E}^{0,1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

de laquelle on tire l'information

$$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) \cong \frac{\mathfrak{E}^{0,1}(X)}{\mathrm{d}''\mathfrak{E}(X)}.$$

Par le lemme de Dolbeault (lemme 1.10.2), $\mathrm{d}''\mathfrak{E}(X) = \mathfrak{E}^{0,1}(X)$. Ceci termine la preuve. ■

Théorème 2.6.5 (Cohomologie du gratte-ciel) *Soit X une surface de Riemann et $p \in \mathbb{C}$, on a pour $q \geq 1$*

$$\mathrm{H}^q(X, \mathbb{C}_p) = 0$$

Preuve Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X et $U_0 \in \mathfrak{U}$ tel que $p \in U_0$. Si $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, posons

$$\begin{aligned} \forall i \in I \setminus \{0\} \qquad U_i' &:= U_i \setminus \{p\} \\ U_0' &:= U_0 \end{aligned}$$

On a que $\mathfrak{U}' := (U_i')_{i \in I}$ est un recouvrement de X et que $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$.

Si $(f_{i_0 \cdots i_q}) \in Z^q(\mathfrak{U}', \mathbb{C}_p)$ alors puisque

$$\mathbb{C}_p(U_{i_0 \cdots i_q}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } i_0 = \cdots = i_q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $f_{i_0\cdots i_q} = 0$ sauf peut-être lorsque $i_0 = \cdots = i_q = 0$. Or, puisque $(f_{i_0\cdots i_q})$ est un cocycle, on a dans le cas où q est impair que

$$f_{0\cdots 0} = \underbrace{f_{0\cdots 0} - f_{0\cdots 0} + \cdots + f_{0\cdots 0}}_{q+2 \text{ fois}} = (\delta(f))_{0\cdots 0} = 0$$

donc $Z^q(\mathfrak{U}', \mathbb{C}_p) = 0$ d'où la conclusion lorsque q est impair.

Dans le cas où q est pair, on ne peut pas conclure que $f_{0\cdots 0} = 0$. Cependant, en choisissant $g \in C^{q-1}(\mathfrak{U}', \mathbb{C}_p)$ tel que

$$g_{i_0\cdots i_{q-1}} = \begin{cases} -f_{0\cdots 0} & \text{si } i_0 = \cdots = i_{q-1} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$(\delta(g))_{0\cdots 0} = \underbrace{g_{0\cdots 0} - g_{0\cdots 0} + \cdots - g_{0\cdots 0}}_{q+1 \text{ fois}} = -g_{0\cdots 0} = f_{0\cdots 0}$$

et pour $(i_0 \cdots i_q) \neq (0, \ldots, 0)$, on a $(\delta(g))_{i_0\cdots i_q} \in \mathbb{C}_p(U_{i_0\cdots i_q}) = 0$, car $p \notin U_{i_0\cdots i_q}$, donc on a $\delta(g) = f$ d'où $Z^q(\mathfrak{U}', \mathbb{C}_p) = B^q(\mathfrak{U}', \mathbb{C}_p)$ d'où la conclusion lorsque q est pair. ∎

2.7 Théorème de Leray

On a défini plus haut (définition 2.5.1) la notion de faisceau. Dans le cas des faisceaux, on n'a pas à manipuler à chaque fois la machinerie des limites inductives quand on choisit un bon recouvrement ouvert.

Théorème 2.7.1 (Leray) *Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur l'espace topologique X et $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que pour tout $i \in I$, $\mathrm{H}^1(U_i, \mathfrak{F}) = 0$. On a alors*

$$\mathrm{H}^1(X, \mathfrak{F}) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$$

Preuve Nous allons montrer que pour tout $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : \mathrm{H}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ est un isomorphisme. Supposons pour le moment les $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ inversibles. On veut vérifier que $\mathrm{H}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ est bien la limite inductive des $\mathrm{H}^1(\mathfrak{W}, \mathfrak{F})$, qui est $\mathrm{H}^1(X, \mathfrak{F})$ par définition. Il nous faut donc des morphismes $\varphi_{\mathfrak{W}} : \mathrm{H}^1(\mathfrak{W}, \mathfrak{F}) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ pour tout recouvrement $\mathfrak{W}$

de X. Soit $\mathfrak{W}$ un recouvrement de X quelconque. Il existe un recouvrement $\mathfrak{V}$ qui soit plus fin que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{W}$. Dans ce cas, puisque $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ est inversible, on peut définir $\varphi_{\mathfrak{W}}$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathfrak{W},\mathfrak{F}) \arrow[d, "\varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}"'] \arrow[rr, "\varphi_{\mathfrak{W}} := \left(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}\right)^{-1} \circ \varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}"] & & \mathrm{H}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \\
\mathrm{H}^1(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \arrow[urr, "\left(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}\right)^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Cette définition de $\varphi_{\mathfrak{W}}$ de dépend pas du recouvrement $\mathfrak{V}$ choisi. Si $\mathfrak{V}'$ est un autre recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{W}$, on sait qu'il existe un recouvrement $\mathfrak{V}''$ plus fin que $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$. On a alors $\varphi^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}''} \circ \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}''}$. Puisque deux de ces morphismes sont inversibles, le troisième l'est aussi, d'où $(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}})^{-1} = (\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}''})^{-1} \circ \varphi^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}''}$. La même égalité est vraie avec $\mathfrak{V}'$ dans le rôle de $\mathfrak{V}$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}\right)^{-1} \circ \varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}} &= \left(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}''}\right)^{-1} \circ \varphi^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}''} \circ \varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}} \\
&= \left(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}''}\right)^{-1} \circ \varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}''} \\
&= \left(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}''}\right)^{-1} \circ \varphi^{\mathfrak{V}'}_{\mathfrak{V}''} \circ \varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}'} \\
&= \left(\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}'}\right)^{-1} \circ \varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}'}
\end{aligned}
$$

et $\varphi_{\mathfrak{W}}$ est bien défini.

Si G est « à droite » des $\mathrm{H}^1(\mathfrak{W},\mathfrak{F})$ c'est-à-dire s'il existe des morphismes

$$g_{\mathfrak{W}} : \mathrm{H}^1(\mathfrak{W},\mathfrak{F}) \to G$$

et si ces morphismes satisfont, pour $\mathfrak{V} < \mathfrak{W}$, $g_{\mathfrak{W}} = g_{\mathfrak{V}} \circ \varphi^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}$ alors il existe un unique morphisme $g : \mathrm{H}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to G$ tel que pour tout $\mathfrak{V}$, $g \circ \varphi_{\mathfrak{V}} = g_{\mathfrak{V}}$. En effet, il faut prendre, et il suffit de prendre, $g := g_{\mathfrak{U}}$. Donc $\mathrm{H}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \varinjlim \mathrm{H}^1(\mathfrak{W},\mathfrak{F})$ où la limite est sur tous les recouvrements $\mathfrak{W}$ de X.

Injectivité de $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$: Montrons à présent que les $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ sont injectifs. Indépendamment de l'hypothèse d'acyclicité $\mathrm{H}^1(U_i,\mathfrak{F}) = 0$, sachant seulement que $\mathfrak{F}$ est un faisceau, on peut conclure que $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ est injectif. En effet, supposons que $\mathfrak{V} = (V_j)_{j\in J}$ et qu'on a une fonction $\tau : J \to I$ telle que $V_j \subset U_{\tau j}$ et considérons un cocycle $f = (f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ tel que $\tau^1 f \in B^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$. (Les τ^q ont été définis à la page 35.) On va montrer que $f \in B^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Supposons $\tau^1 f = \delta(g)$ pour $g = (g_j) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$. Soit $i \in I$, sur $U_i \cap V_k \cap V_l$, on a

$$\begin{aligned}(g_k - g_l)\Big|_{U_i\cap V_k\cap V_l} &= f_{\tau l \tau k}\Big|_{U_i\cap V_k\cap V_l} \\ &= -f_{i\tau l}\Big|_{U_i\cap V_k\cap V_l} + f_{i\tau k}\Big|_{U_i\cap V_k\cap V_l} \quad \text{car } \big(\delta(f)\big)_{i\tau l\tau k} = 0\end{aligned}$$

donc $(f_{i\tau k} - g_k)\Big|_{U_i\cap V_k\cap V_l} = (f_{i\tau l} - g_l)\Big|_{U_i\cap V_k\cap V_l}$. Puisque $\mathfrak{F}$ est un faisceau, on sait qu'il existe $h_i \in \mathfrak{F}(U_i)$ tel que, pour tout $k \in J$,

$$h_i\Big|_{U_i\cap V_k} = (f_{i\tau k} - g_k)\Big|_{U_i\cap V_k}$$

On a alors

$$\begin{aligned}(h_i - h_j)\Big|_{U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l} &= (f_{i\tau k} - g_k)\Big|_{U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l} - (f_{j\tau k} - g_k)\Big|_{U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l} \\ &= (f_{i\tau k} - f_{j\tau k})\Big|_{U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l} \\ &= f_{ij}\Big|_{U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l} \quad \text{car } \big(\delta(f)\big)_{ij\tau k} = 0\end{aligned}$$

Comme k et l sont quelconques et que $\mathfrak{F}$ est un faisceau, on sait qu'il existe un unique $F_{ij} \in \mathfrak{F}(U_i \cap U_j)$ tel que $F_{ij}\Big|_{U_i\cap U_j\cap V_k} = f_{ij}\Big|_{U_i\cap U_j\cap V_k}$. Or, f_{ij} et $(h_i - h_j)\Big|_{U_i\cap U_j}$ font l'affaire alors ils sont égaux d'où $f = \delta(h)$ si h désigne la cochaîne (h_i). Par conséquent, $\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ est bien injectif.

Surjectivité de $\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$: Pour montrer que les $\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ sont des isomorphismes, il suffit maintenant de montrer qu'ils sont surjectifs. Soit $f = (f_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$. La famille $(U_i \cap V_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de U_i qu'on note $U_i \cap \mathfrak{V}$. Par hypothèse et parce que les $\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ sont injectifs, on a $\mathrm{H}^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathfrak{F}) = 0$.

Prenons quelques lignes pour le démontrer. Si $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$ est la limite inductive d'un système inductif $((A_i)_{i\in I}, (\alpha_i^j)_{i\leq j})$ tel que les α_i^j soient injectifs alors

$$A = 0 \Longrightarrow \text{ tous les } A_i \text{ sont nuls aussi.}$$

En effet, si $a_i \in A_i$, on sait que $\alpha_i(a_i) = 0$. Selon notre construction explicite de la limite inductive (théorème 2.2.2), cela signifie qu'il existe $j \in I$ tel que $a_i \backsim 0 \in A_j$. Donc il existe $k \in I$ tel que $k \leq i$, $k \leq j$ et $\alpha_k^i(a_i) = \alpha_k^j(0) = 0$. Puisque α_k^i est injectif, $a_i = 0$ d'où $A_i = 0$.

Puisque $\mathrm{H}^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathfrak{F}) = 0$, on a un $g^i = (g_j^i)_{j \in J} \in C^0(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ tel que $\delta(g^i) = (f_{\alpha\beta}\Big|_{U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta})$, c'est-à-dire

$$f_{\alpha\beta}\Big|_{U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta} = g_\beta^i\Big|_{V_\alpha \cap V_\beta \cap U_i} - g_\alpha^i\Big|_{V_\beta \cap V_\alpha \cap U_i}$$

Sur $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$, on a

$$\begin{aligned} (g_\alpha^i - g_\alpha^j)\Big|_{U_{ij} \cap V_{\alpha\beta}} &= -f_{\alpha\beta}\Big|_{U_{ij} \cap V_{\alpha\beta}} + g_\beta^i\Big|_{V_{\alpha\beta} \cap U_{ij}} - \left(-f_{\alpha\beta}\Big|_{U_{ij} \cap V_{\alpha\beta}} + g_\beta^j\Big|_{V_{\alpha\beta} \cap U_{ij}}\right) \\ &= (g_\beta^i - g_\beta^j)\Big|_{U_{ij} \cap V_{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

donc, puisque $\mathfrak{F}$ est un faisceau, on sait qu'il existe un unique $F_{ij} \in \mathfrak{F}(U_i \cap U_j)$ tel que pour tout $\alpha \in J$

$$F_{ij}\Big|_{V_\alpha} = (g_\alpha^i - g_\alpha^j)\Big|_{U_i \cap U_j \cap V_\alpha}$$

Si on note F la cochaîne (F_{ij}), on a, pour chaque $\alpha \in J$,

$$\begin{aligned} (\delta F)_{ijk}\Big|_{V_\alpha \cap U_{ijk}} &= (F_{jk} - F_{ik} + F_{ij})\Big|_{V_\alpha \cap U_{ijk}} \\ &= \left(g_\alpha^j - g_\alpha^k - (g_\alpha^i - g_\alpha^k) + g_\alpha^i - g_\alpha^j\right)\Big|_{U_i \cap U_j \cap U_k \cap V_\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, toujours parce que $\mathfrak{F}$ est un faisceau, on doit avoir $(\delta F)_{ijk} = 0$ et $F \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. C'est ce cocyle qui nous permet de démontrer la surjectivité. Si on considère la cochaîne $h := (h_j) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ où $h_j := g_j^{\tau j}\Big|_{V_j} \in \mathfrak{F}(V_j)$, on a, pour tout $i, j \in I$,

$$\begin{aligned} F_{\tau i \tau j}\Big|_{V_i \cap V_j} - f_{ij} &= (g_i^{\tau i} - g_i^{\tau j})\Big|_{U_{\tau i} \cap U_{\tau j} \cap V_i \cap V_j} - (g_j^{\tau j} - g_i^{\tau j})\Big|_{U_{\tau i} \cap U_{\tau j} \cap V_i \cap V_j} \\ &= (h_i - h_j)\Big|_{V_i \cap V_j} \end{aligned}$$

d'où $\tau^1 F = f - \delta(h)$ et $\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ est surjective puisque $\varphi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}\left(F + B^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})\right) = \tau^1 F + B^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$. ■

CHAPITRE III

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Dans ce chapitre, voyons comment utiliser la cohomologie des faisceaux pour montrer le théorème de Riemann-Roch.

La preuve est vraiment simple, il s'agit d'utiliser une suite exacte pour faire une preuve par récurrence. Seule l'étape initiale nous fera travailler un peu plus fort.

3.1 Diviseurs

Définition 3.1.1 *Un* diviseur *sur une surface de Riemann X est une fonction*

$$D : X \to \mathbb{Z}$$

telle que $D^{-1}(\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ est localement fini, c'est-à-dire telle que pour tout compact $K \subset X$, $K \cap D^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ est fini.

Une autre façon de voir les diviseurs est de les considérer comme des combinaisons linéaires localement finies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de points de X. Sous ce point de vue, si $p \in X$, alors p représente aussi le diviseur qui vaut 0 partout sauf en p où il vaut 1. Par ailleurs, on peut se permettre d'additionner ou de soustraire, ou même de multiplier par une constante entière les diviseurs.

Si $f \in \mathcal{M}(X)$ est une fonction méromorphe non-nulle, on note $\mathfrak{D}(f)$ le diviseur des zéros et des pôles de f, c'est-à-dire $\mathfrak{D}(f)(p) = \mathrm{ord}_p f$. Bien entendu, on a $\mathfrak{D}(fg) = \mathfrak{D}(f) + \mathfrak{D}(g)$.

On définit sur l'ensemble des diviseurs sur X deux relations

- une relation d'ordre: $D \geq D' \Longleftrightarrow \forall x \in X,\, D(x) \geq D'(x)$
- une relation d'équivalence: $D \sim D' \Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X)$ tel que $D - D' = \mathfrak{D}(f)$

Si $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ est une forme méromorphe, alors localement on a $\omega = f\mathrm{d}z$ autour d'un point p. On dit alors que $\mathrm{ord}_p\omega = \mathrm{ord}_p f$ et on note $\mathfrak{D}(\omega)$ le diviseur des zéros et des pôles de ω. Le diviseur d'une forme méromorphe non-nulle est ce qu'on appelle un *diviseur canonique* sur X. Tous les diviseurs canoniques sont équivalents puisque si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$, alors il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que $\omega_2 = f\omega_1$, d'où $\mathfrak{D}(\omega_2) = \mathfrak{D}(\omega_1) + \mathfrak{D}(f)$.

Pour un diviseur D sur X, on note

$$\deg D := \sum_{p \in X} D(p)$$

On peut montrer que si $f \in \mathcal{M}(X)$, X compacte, alors $\deg(\mathfrak{D}(f)) = 0$. On peut voir la preuve du fait que toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte a, en comptant avec multiplicité, autant de zéros que de pôles en consultant la section 10 du chapitre 1 de (Forster, 1981).

3.2 Le formulation du problème avec des faisceaux

Définissons maintenant le préfaisceau clef du théorème de Riemann-Roch, le faisceau $\mathcal{O}_D$ pour un diviseur D sur X. Si U est un ouvert de X, on définit

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) \mid f = 0 \text{ ou } \mathfrak{D}(f) \geq -D\big|_U\}$$

On a ici noté $D\big|_U$ parce que D est une fonction $X \to \mathbb{Z}$ définie sur tout X. Si $U_1 \subset U_2$, on a la restriction

$$\begin{aligned} \rho_{U_1}^{U_2} : \mathcal{O}_D(U_2) &\longrightarrow \mathcal{O}_D(U_1) \\ f &\mapsto f\big|_{U_1} \end{aligned}$$

Ce qui nous intéresse (relire au besoin l'introduction), c'est le calcul de $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X)$. Puisque $\mathcal{O}_D$ est un faisceau, on a $\mathcal{O}_D(X) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$. On voudra donc montrer

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D$$

où le genre g est par définition la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O})$.

On doit prouver tout d'abord qu'on peut légalement écrire cette formule en s'assurant que g est fini.

3.3 Le genre $g = \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O})$

Dans cette section, on va montrer que $\dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O})$ est finie. L'astuce est simple mais très technique. Les idées principales sont d'utiliser des recouvrements acycliques de X, c'est-à-dire satisfaisant à l'hypothèse du théorème 2.7.1, de définir une norme sur nos espaces vectoriels de cochaînes, d'en tirer un espace de Banach et d'utiliser la structure vectorielle et topologique pour plusieurs recouvrements acycliques emboîtés de X pour en conclure la finitude du genre.

S'il n'y avait eu un quelconque principe de conservation de la difficulté, la preuve de la finitude du genre aurait été beaucoup plus courte en considérant un autre type d'espace vectoriel topologique, les espaces de Fréchet. Malheureusement, cette seconde preuve demande beaucoup plus de connaissances en analyse complexe et en analyse fonctionnelle que la première, de sorte que l'espace épargné en préférant cette seconde preuve aurait été récupéré par les préliminaires.

Faute d'originalité, nous reprenons ici l'argumentation de la section 14 du chapitre 2 de (Forster, 1981).

Un espace de Banach

On définit tout d'abord une norme sur $\mathcal{O}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$, on pose

$$\|f\|_{L^2(U)} := \left(\iint_U |f(x+iy)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

Bien sûr, il arrivera que $\|f\|_{L^2(U)}$ soit infinie, c'est pour cela que l'on ne considérera que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(U)$ suivant

$$L^2(U,\mathcal{O}) := \{f \in \mathcal{O}(U) \mid \|f\|_{L^2(U)} < \infty\}$$

Si on pose $\|f\|_U := \sup_{u\in U} |f(u)|$, on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(U)} &= \left(\iint_U |f(x+iy)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\iint_U \sup |f(x+iy)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_U \left(\iint_U \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_U \sqrt{\text{aire de } U}
\end{aligned}$$

Si U est choisi comme étant $B := B(a,r)$, c'est-à-dire la boule de rayon r centrée en $a \in \mathbb{C}$, on peut choisir une suite d'éléments privilégiés de $\mathcal{O}(U)$, les

$$\psi_n(z) := (z-a)^n$$

On a

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\|^2_{L^2(B)} &= \iint_B |\psi_n(x+iy)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_B |(x+iy-a)^n|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{B(0,1)} |(x+iy)^n|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^{2n}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^{2n+2}}{2n+2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2\pi r^{2n+2}}{2n+2} = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \end{aligned}$$

d'où $\|\psi_n\|_{L^2(B)} = \frac{\sqrt{\pi}r^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

On introduit sur $L^2(U,\mathcal{O})$ un produit scalaire. Si $f,g \in L^2(U,\mathcal{O})$, on pose

$$\langle f,g\rangle := \iint_U f\overline{g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cette intégrale existe car on a $0 \leq (|f(z)| - |\overline{g}(z)|)^2 \leq |f(z)|^2 - 2|f(z)\overline{g}(z)| + |g(z)|^2$. D'où $|\langle f,g\rangle| = |\iint_U f\overline{g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leq \iint_U |f\overline{g}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \frac{1}{2}\left(\iint_U |f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_U |g|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) < \infty$. Ce produit scalaire induit la norme $\|\cdot\|_{L^2(U)}$ sur U.

Si on calcule $\langle\psi_n,\psi_m\rangle$ pour $n > m$, on a

$$\begin{aligned} \langle\psi_n,\psi_m\rangle &= \iint_{B(a,r)} (z-a)^n\overline{(z-a)^m}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{B(0,r)} (z)^n\overline{(z)^m}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^{2m}\rho^{n-m}e^{(n-m)i\theta}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{r^{m+n+2}}{m+n+2}e^{(n-m)i\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la famille (ψ_n) est orthogonale.

Si $f \in L^2(B,\mathcal{O})$, on peut écrire l'égalité

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n = \sum_{n\geq 0} a_n\psi_n(z),$$

de laquelle on tire

$$\|f\|^2_{L^2(B)} = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2\|\psi_n(z)\|^2_{L^2(B)} = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2\frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}.$$

Ce « théorème de Pythagore infini » s'appelle l'identité de Parseval et découle directement du théorème 10.45 de (Rudin, 1974) (11.45 dans une édition ultérieure que je n'arrive plus à trouver).

Pour le lecteur soucieux de remonter aux sources, voici un dictionnaire permettant de comprendre le langage de Rudin: le système orthonormal complet $\{\phi_n\}$ de Rudin est ici un système maximal contenant $\left\{\psi_n/\|\psi_n\|_{L^2(B)}\right\}$; modulo une petite renumérotation pour tenir compte des éléments rajoutés, $c_n := |a_n|\|\psi_n(z)\|_{L^2(B)}$; l'espace X de Rudin est notre boule B ; la mesure μ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ restreinte à B.

Avant de poursuivre, considérons le résultat suivant:

Théorème 3.3.1 *Si $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et $U_r := \{z \in \mathbb{C} \mid B(z,r) \subset U\}$ alors pour tout $f \in L^2(U, \mathcal{O})$,*

$$\|f\|_{U_r} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(U)}$$

Preuve Soit $a \in U_r$ et $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$. On a

$$\begin{aligned} |f(a)| = |a_0| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(B(a,r))} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(U)} \end{aligned}$$

donc $\|f\|_{U_r} = \sup_{a \in U_r}|f(a)|$ satisfait aussi l'inégalité. ∎

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(U, \mathcal{O})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2(U)}$ alors f_n converge uniformément sur tout compact dans U vers une fonction f(voir plus bas). Le théorème 1.2.2 nous indique donc que la limite est une fonction holomorphe et on aura, puisque l'inégalité $\left|\|f_n\|_{L^2(U)} - \|f_m\|_{L^2(U)}\right| \leq \|f_n - f_m\|_{L^2(U)}$ nous dit que la suite $(\|f_n\|_{L^2(U)})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est de Cauchy, que

$$\|f\|_{L^2(U)} = \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^2(U)} < \infty,$$

donc $L^2(U,\mathcal{O})$ est un espace vectoriel normé complet, ce qu'on appelle un espace de Banach.

Pourquoi la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact dans U? C'est simple, si K est un compact de U, il existe $r>0$ tel que $K\subset U_r$. On a alors $\forall\epsilon>0\ \exists N$ tel que

$$\forall n,m\geq N,\ \forall z\in K,\ |f_n(z)-f_m(z)|\leq \|f_n-f_m\|_{U_r}\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f_n-f_m\|_{L^2(U)}\leq\epsilon$$

puisque (f_n) est de Cauchy dans $L^2(U,\mathcal{O})$. Donc pour tout $z\in K$, la suite $(f_n(z)$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ et converge, disons vers $f(z)$, puisque $\mathbb{C}$ est complet. Ceci nous définit une fonction f. On a alors

$$\forall n\geq N,\ \forall z\in K,\ |f_n(z)-f(z)|=|f_n(z)-\lim_{m\to\infty}f_m(z)|=\lim_{m\to\infty}|f_n(z)-f_m(z)|\leq\epsilon.$$

On a

Lemme 3.3.2 *Si $U'\Subset U$ dans $\mathbb{C}$, alors pour tout $\epsilon>0$, il existe un sous-espace vectoriel fermé A de $L^2(U,\mathcal{O})$ de codimension finie tel que*

$$\forall f\in A,\quad \|f\|_{L^2(U')}\leq\epsilon\|f\|_{L^2(U)}$$

Preuve Puisque $\overline{U'}$ est compact dans U, il existe $r>0$ et $a_1,\dots,a_n\in U$ tels que

1. $B(a_j,r)\subset U$
2. $U'\subset\bigcup_{j=1}^k B(a_j,\frac{r}{2})$

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq\log_2\left(\frac{k}{\epsilon}\right)-1$. On a alors $2^{n+1}\geq\frac{k}{\epsilon}$ et $\epsilon\geq k2^{-n-1}$. Soit A l'espace vectoriel des $f\in L^2(U,\mathcal{O})$ telles qu'on écrit autour des a_j

$$f(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty}c_\nu(z-a_j)^\nu.$$

Quelles libertés a-t-on dans $\frac{L^2(U,\mathcal{O})}{A}$? Si f et g dans $L^2(U,\mathcal{O})$ ont un même développement en série jusqu'à l'ordre $n-1$ aux points a_j, alors $f-g\in A$. Donc $\dim\left(\frac{L^2(U,\mathcal{O})}{A}\right)\leq kn$ et A est de codimension finie.

Si $(f_i)_{i\geq 0}$ est une suite dans A qui converge dans $L^2(U,\mathcal{O})$ alors pour $0\leq l\leq n$, si $f^{(l)}$ dénote la l-ième dérivée de la fonction f,

$$\left(\lim_{i\to\infty} f_i\right)^{(l)}(a_j) = \lim_{i\to\infty}\left(f_i^{(l)}(a_j)\right) = 0 \qquad (1\leq j\leq k)$$

donc $\lim\limits_{i\to\infty} f_i \in A$ et A est fermé.

Pour tout $0<\rho\leq r$ et $f\in A$, on a

$$\|f\|^2_{L^2(B(a_j,\rho))} = \sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\pi\rho^{2\nu+2}}{\nu+1}|c_\nu|^2$$

donc

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(B(a_j,\frac{r}{2}))} &= \sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\pi r^{2\nu+2}}{(\nu+1)2^{2\nu+2}}|c_\nu|^2\\ &\leq \frac{1}{2^{2n+2}}\|f\|^2_{L^2(B(a_j,r))}\end{aligned}$$

On a de plus

$$\|f\|_{L^2(B(a_j,r))} \leq \|f\|_{L^2(U)}$$

car $B(a_j,r)\subset U$ et

$$\|f\|_{L^2(U')} \leq \sum_{j=1}^{k}\|f\|_{L^2(B(a_j,\frac{r}{2}))}$$

car $U'\subset\bigcup_{j=1}^{k} B(a_j,\frac{r}{2})$ donc

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(U')} &\leq \sum_{j=1}^{k}\|f\|_{L^2(B(a_j,\frac{r}{2}))}\\ &\leq \sum_{j=1}^{k}2^{-n-1}\|f\|_{L^2(B(a_j,r))}\\ &\leq \sum_{j=1}^{k}2^{-n-1}\|f\|_{L^2(U)}\\ &= k2^{-n-1}\|f\|_{L^2(U)}\\ &\leq \epsilon\|f\|_{L^2(U)}\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Les cochaînes L^2 et quelques inégalités

Si X est une surface de Riemann compacte, on peut recouvrir X par une famille finie de cartes (U_i, z_i). Posons $\mathfrak{U} := (U_i)_{1\leq i\leq n}$. Pour $f = (f_{i_0\cdots i_q}) \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, on pose

$$\|f\|_{L^2(\mathfrak{U})} := \sum_{i_0\cdots i_q} \|f_{i_0\cdots i_q}\|_{L^2(U_{i_0\cdots i_q})}$$

où $\|f_{i_0\cdots i_q}\|_{L^2(U_{i_0\cdots i_q})} := \|f_{i_0\cdots i_q} \circ z_{i_0}^{-1}\|_{L^2(z_{i_0}(U_{i_0\cdots i_q}))}$

On peut alors considérer $C^q_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = \{f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \mid \|f\|_{L^2(\mathfrak{U})} < \infty\}$, $B^q_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) := B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \cap C^q_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ et $Z^q_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) := Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \cap C^q_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

Supposons que $\mathfrak{V} := (V_i)_{i\in I}$ soit un recouvrement de X plus fin que $\mathfrak{U}$ tel que $V_i \Subset U_i$. On rappelle qu'on note $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ lorsqu'on se trouve dans une situation semblable. Dans ce cas, on a pour chaque $\xi \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ que $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$ (attention aux recouvrements considérés) où cette dernière norme est calculée sur la cochaîne $(\xi_{i_0\cdots i_q}\big|_{V_{i_0\cdots i_q}})_{(i_0\cdots i_q)\in I^{q+1}}$.

Le lemme 3.3.2 nous permet de conclure que pour tout $\epsilon > 0$ et toute paire de recouvrements $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ formés d'ouverts de cartes, il existe un sous-espace vectoriel $A \subset Z^q_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ de codimension finie tel que pour tout $\xi \in A$, $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \epsilon\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})}$.

Lemme 3.3.3 *Soit X une surface de Riemann compacte et $\mathfrak{U}^* := (U_i^*)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'ouverts de cartes recouvrant X. Si on a des recouvrements $\mathfrak{W} := (W_i)_{1\leq i\leq n}$, $\mathfrak{V} := (V_i)_{1\leq i\leq n}$, $\mathfrak{U} := (U_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$ (avec $W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U_i^*$) alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})\ \exists\zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})\ \textit{et}\ \eta \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})\ \textit{avec}\ \zeta = \xi + \delta\eta\ \textit{sur}\ \mathfrak{W}$$

et

$$\max\left(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}\right) \leq C\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}.$$

Preuve Soit $\xi = (f_{ij}) \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. Puisque $H^1(X, \mathfrak{C}) = 0$, on sait qu'il existe $(g_i) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$ tel que, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $f_{ij} = (g_j - g_i)\big|_{V_{ij}}$. Puisque, pour tout

$1 \leq i, j \leq n$, $\mathrm{d}'' f_{ij} = 0$ (rappelons qu'on a défini d'' à la page 15), on a $\mathrm{d}'' g_i\Big|_{V_{ij}} = \mathrm{d}'' g_j\Big|_{V_{ij}}$ et il existe par conséquent un $\omega \in \mathfrak{C}^{0,1}(X)$ tel que, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $\omega\Big|_{V_i} = \mathrm{d}'' g_i$, $\mathfrak{C}^{0,1}$ étant un faisceau.

Par le lemme de Dolbeault, il existe $h_i \in \mathfrak{C}(U_i^*)$ tel que $\mathrm{d}'' h_i = \omega\Big|_{U_i^*}$. Puisque $\mathrm{d}'' h_i\Big|_{U_{ij}^*} = \mathrm{d}'' h_j\Big|_{U_{ij}^*}$, on a $F_{ij} := h_j - h_i \in \mathcal{O}(U_{ij}^*)$ car $\mathrm{d}'' F_{ij} = 0$. Posons $\zeta := (F_{ij}\Big|_{U_{ij}})$. Puisque $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$, on a $\zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

Sur V_i, $\mathrm{d}'' h_i\Big|_{V_i} = \omega\Big|_{V_i} = \mathrm{d}'' g_i$ donc $h_i\Big|_{V_i} - g_i \in \mathcal{O}(V_i)$. Puisque $W_i \Subset V_i$, on a $\eta := (h_i - g_i\Big|_{W_i}) \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$. Mais

$$\begin{aligned} (F_{ij} - f_{ij})\Big|_{W_{ij}} &= (h_j\Big|_{W_{ij}} - h_i\Big|_{W_{ij}}) - (g_j\Big|_{W_{ij}} - g_i\Big|_{W_{ij}}) \\ &= (h_j - g_j)\Big|_{W_{ij}} - (h_i - g_i)\Big|_{W_{ij}} \end{aligned}$$

Donc sur $\mathfrak{W}$, $\zeta - \xi = \delta\eta$ tel que demandé.

Pour l'estimé sur les normes, on considère l'espace vectoriel

$$H := Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

avec la norme $\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H := \left(\|\zeta\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} + \|\xi\|^2_{L^2(\mathfrak{V})} + \|\eta\|^2_{L^2(\mathfrak{W})} \right)^{\frac{1}{2}}$. C'est un espace de Banach. Soit $L \subset H$ le sous-espace

$$L := \{(\zeta, \xi, \eta) \in H \mid \zeta = \xi + \delta\eta \text{ sur } \mathfrak{W}\}.$$

Puisque le sous-espace L est fermé dans H, il est complet et est donc un espace de Banach. On a vu plus haut que l'application linéaire continue

$$\begin{aligned} \pi : \quad L &\longrightarrow Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \\ (\zeta, \xi, \eta) &\longmapsto \xi \end{aligned}$$

est surjective. Il existe donc une constante $C > 0$ tel que pour tout $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$, il existe $x = (\zeta, \xi, \eta) \in L$ avec $\|x\|_H \leq C\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}$ en vertu du corollaire 1.9.2 du théorème de la fonction ouverte. Donc

$$\max\left(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})} \right) \leq \|x\|_H \leq C\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}$$

ce qui termine la preuve. ∎

Lemme 3.3.4 *Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme 3.3.3, il existe alors un sous-espace vectoriel* $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ *de dimension finie tel que*

$$\forall \xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \ \exists \sigma \in S \ \textit{et} \ \eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

tels que $\sigma = \xi + \delta\eta$ *sur* $\mathfrak{W}$*, c'est-à-dire* $\operatorname{Im}\left(\mathrm{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})\right)$ *a dimension finie.*

Preuve Soit C la constante du lemme précédent et $\epsilon := \left(\frac{1}{2C}\right)$. On sait qu'il y a un sous-espace de codimension finie $A \subset Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ tel que

$$\forall \xi \in A \qquad \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \epsilon \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})}.$$

Soit S le complément orthogonal de A dans $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, c'est-à-dire $A \oplus S = Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

Prenons $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Puisque $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$, on a $M := \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$ donc $\xi\Big|_{\mathfrak{V}} \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$, où $\xi\Big|_{\mathfrak{V}} := \left(\xi_{ij}\Big|_{V_{ij}}\right)_{(i,j)\in I^2}$. Par le lemme 3.3.3, il existe un $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ et $\eta_0 \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) \subset C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tel que $\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0$ sur $\mathfrak{W}$ et $\|\xi_0\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq CM$ et $\|\eta_0\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq CM$. Supposons que la décomposition de ζ_0 dans $A \oplus S$ soit $\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0$ où $\xi_0 \in A$ et $\sigma_0 \in S$. On va ramener tranquillement ζ_0 dans S par récurrence en construisant

$$X_\nu := (\zeta_\nu, \eta_\nu, \xi_\nu, \sigma_\nu) \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) \times A \times S$$

tel que

1. $\zeta_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta\eta_\nu$ sur $\mathfrak{W}$ $\qquad (\xi_{-1} = \xi)$
2. $\zeta_\nu = \xi_\nu + \sigma_\nu$
3. $\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-\nu}CM$ et $\|\eta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-\nu}CM$

On a déjà construit X_0. Montrons qu'on peut construire $X_{\nu+1}$ si on a construit X_ν. Puisque $\zeta_\nu = \xi_\nu + \sigma_\nu$ est la décomposition orthogonale de ζ_ν, on a $\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq$

$\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-\nu}CM$ donc $\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \epsilon\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-\nu}\epsilon CM \leq 2^{-\nu-1}M$. Par le lemme précédent (lemme 3.3.3), il existe $\zeta_{\nu+1} \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ et $\xi_{\nu+1} \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tels que

$$\zeta_{\nu+1} = \xi_\nu + \delta\eta_{\nu+1} \qquad \text{sur } \mathfrak{W}$$

et

$$\max\left(\|\zeta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{W})}\right) \leq 2^{-\nu-1}CM$$

On a la décomposition orthogonale

$$\zeta_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$$

pour des éléments $\xi_{\nu+1} \in A$ et $\sigma_{\nu+1} \in S$. On a donc bien construit $X_{\nu+1}$.

En déroulant l'équation $\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0$ par le biais des propriétés 1 et 2 des X_ν, on a

$$\xi_k + \sum_{\nu=0}^{k} \sigma_\nu = \xi + \delta\left(\sum_{\nu=0}^{k} \eta_\nu\right)$$

En faisant tendre k vers l'infini, on a $\eta_k \to 0$ et $\zeta_k \to 0$ à cause des bornes sur les normes (propriété 3) donc $\xi_k \to 0$ à cause de la propriété 1. Les deux séries convergent, disons $\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu$ et $\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu$, toujours à cause des bornes sur les normes. Par ailleurs, $\sigma \in S$ puisque S, étant de dimension finie, est fermé et que chacune des sommes partielles est dans S. Ceci termine la preuve. ∎

Après tous ces lemmes techniques, nous pouvons conclure.

Théorème 3.3.5 (Le genre est fini) *Soit X une surface de Riemann compacte. On a alors*

$$\dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) < \infty.$$

Preuve Puisque X est compact, on peut trouver un nombre fini d'ouverts de cartes $\mathfrak{U}^* = (U_i^*)_{1\leq i\leq n}$ qui recouvrent X et des sous-ouverts $W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U_i^*$ tels que $\mathfrak{W} := (W_i)_{1\leq i\leq n}$, $\mathfrak{V} := (V_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathfrak{U} := (U_i)_{1\leq i\leq n}$ recouvrent X. Par le théorème 2.6.4, $H^1(o, \mathcal{O}) = 0$ pour tout ouvert $o \in \mathfrak{W} \cup \mathfrak{V} \cup \mathfrak{U} \cup \mathfrak{U}^*$, donc le théorème de Leray (théorème 2.7.1) stipule que

$$\mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}) = \mathrm{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{W},\mathcal{O}).$$

Or, le lemme précédent stipule à son tour que l'homomorphisme $\mathrm{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{W},\mathcal{O})$ a une image de dimension finie. Puisqu'il s'agit d'un isomorphisme, la preuve est finie. ∎

3.4 La suite exacte

Pour tout ouvert U de X, considérons la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{O}_{D+p}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathbb{C}_p(U) \longrightarrow 0 \quad (E_U)$$

où α_U est l'inclusion, β_U est nul si $p \notin U$ et β_U est défini par la règle suivante si $p \in U$: si $D(p) = k$, alors tout $f \in \mathcal{O}_{D+p}(U)$ est, par définition, tel que $\mathrm{ord}_p f \geq -k-1$. Fixons une carte (V, z) centrée en p. Sur $U \cap V$, on peut écrire $f = \sum_{n \geq -k-1} a_n z^n$. On pose $\beta_U(f) = a_{-k-1}$,

Bien sûr, si $f \in \mathcal{O}_D(U)$, $\beta_U(f) = 0$ (c'est-à-dire $\beta_U \circ \alpha_U(f) = 0$) d'où $\mathrm{Im}(\alpha_U) \subset \ker(\beta_U)$. Par ailleurs, si $\beta_U(f) = 0$, alors $\mathrm{ord}_p f \geq -k$ et $f \in \mathcal{O}_D(U)$, c'est-à-dire $\ker(\beta_U) \subset \mathrm{Im}(\alpha_U)$, d'où l'égalité $\ker(\beta_U) = \mathrm{Im}(\alpha_U)$.

Le morphisme α_U est évidemment injectif. Il reste à montrer que β_U est surjectif afin de prouver que la suite E_U est exacte. En fait, selon l'ouvert U choisi, β_U n'est pas obligatoirement surjectif. Par exemple, si $D + p < 0$, $\beta_X \equiv 0$ parce que les fonctions holomorphes sur X compacte sont constantes. Mais si U est suffisamment petit, par exemple si $U = V$, $\beta_V(az^{-k-1}) = a$ et β_V surjectif.

Si $p \notin U$, $\mathcal{O}_{D+p}(U) = \mathcal{O}_D(U)$ et $\mathbb{C}_p(U) = 0$ alors E_U est exacte.

On note parfois α au lieu de α_U pour alléger la notation. Nous utiliserons cette convention pour la discussion qui vient.

Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X, prenons $U_0 \in \mathfrak{U}$ tel que $p \in U_0$ et posons

$$\mathfrak{U}' = \{U \setminus \{p\} \mid U \in \mathfrak{U}\} \cup \{U_0 \cap V\}.$$

Ici, l'ouvert V est bien l'ouvert de carte choisi plus haut. On a que $\mathfrak{U}'$ est un recouvrement de X, $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$ et pour toute intersection finie W d'ouverts de $\mathfrak{U}'$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D(W) \longrightarrow \mathcal{O}_{D+p}(W) \longrightarrow \mathbb{C}_p(W) \longrightarrow 0$$

est exacte.

La conclusion du théorème 2.4.1 est donc qu'il existe une longue suite exacte en cohomologie:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_D) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_{D+p}) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathbb{C}_p) \arrow[dll] & (\heartsuit) \\ & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_D) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_{D+p}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}_p) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Or, nous avons le théorème 2.6.5 qui stipule que

$$\mathrm{H}^q(X,\mathbb{C}_p) = 0$$

pour $q \geq 1$ et il ne faut pas oublier que

$$\mathrm{H}^0(X,\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p(X) = \mathbb{C}$$

Nous avons donc l'ingrédient principal pour la preuve du théorème de Riemann-Roch, la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_D) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_{D+p}) \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[dl] & & (\clubsuit) \\ & & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_D) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_{D+p}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

3.5 Le théorème lui-même

Dans cette section, nous énonçons puis démontrons le théorème de Riemann-Roch.

Théorème 3.5.1 (Riemann-Roch) *Si X est une surface de Riemann compacte et D est un diviseur sur X, alors*

$$\begin{array}{ll} \forall q \in \{0,1\} & \dim \mathrm{H}^q(X,\mathcal{O}_D) < \infty \\ \forall q \geq 2 & \dim \mathrm{H}^q(X,\mathcal{O}_D) = 0 \end{array}$$

et

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D$$

où g est le genre de X.

Preuve Une simple preuve par récurrence suffira pour confondre les sceptiques. La récurrence se fait sur $s(D) := \sum_{p \in X} |D(p)|$.

Si $s(D) = 0$, on a $D = 0$ et $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$. L'égalité

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) = 1 - g$$

est tautologique, puisque $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$ et, par définition, $g = \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O})$. Il faut revoir la section 3.3 en page 55 pour la preuve que g est un nombre fini.

Supposons que le théorème soit vrai pour tout diviseur D tel que $s(D) = s \geq 0$, nous allons montrer qu'il est vrai pour tout diviseur D' tel que $s(D') = s+1$. Si $s(D') = s+1$, on doit avoir un point $p \in X$ et un diviseur D sur X tels que $D' = D \pm p$ où $s(D) = s$.

Considérons tout d'abord le cas $D' = D + p$. Il faut tout d'abord montrer que les dimensions des groupes de cohomologies concernés sont finies. On dit ici « groupes de cohomologies » par réflexe. On a bien sûr des espaces vectoriels complexes. Posons

$$\begin{array}{rcl} V & := & \mathrm{Im}\left(\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \to \mathbb{C}\right) \\ W & := & \mathbb{C}/V \end{array}$$

on peut obtenir à partir de la suite exacte ♣ deux nouvelles suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow 0$$

Puisque $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$ et $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D)$ sont de dimensions finies par hypothèse de récurrence et puisque $\dim V$ et $\dim W$ sont inférieures ou égales à 1, on a que les autres espaces vectoriels de ces suites doivent être de dimension finie. En effet, si on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

l'application $B \to C$ étant surjective et $A \to B$ étant injective, on a $C = \mathrm{Im}(B \to C) \cong B/\ker(B \to C) = B/\mathrm{Im}(A \to B)$. Si on sait que deux des A, B ou C sont de dimension finie, le troisième l'est automatiquement.

Si $D' = D - p$, on utilise la même suite ♣ mais avec D' dans le rôle de D. Le même petit jeu nous montre que les dimensions de groupes de cohomologie de $\mathcal{O}_{D'}$ sont finies.

Continuons à régler le cas $D' = D + p$. La suite ♣ étant exacte, la somme alternée des dimensions des espaces vectoriels de cette suite est nulle comme on l'a montré au lemme 1.11.2. On a donc

$$0 - \dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) - 1 + \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) + 0 = 0$$

d'où

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) &= \dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) + 1 \\
&= 1 - g + \deg D + 1 \quad \text{(par récurrence)} \\
&= 1 - g + \deg(D')
\end{aligned}$$

De retour au cas $D = D' - p$, on a

$$0 - \dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'+p}) - 1 + \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'+p}) + 0 = 0$$

d'où, puisque $D' + p = D$,

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) &= \dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) - 1 \\
&= 1 - g + \deg D - 1 \quad \text{(par récurrence)} \\
&= 1 - g + \deg(D')
\end{aligned}$$

Jusqu'à présent, nous n'avons montré que $\dim \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D) < \infty$ pour $q \in \{0, 1\}$. Or l'énoncé nous dit que c'est vrai pour tout $q \geq 0$. Nous allons maintenant prouver que pour tout $q \geq 2$, non seulement $\dim \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D) < \infty$ mais $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D) = 0$. En effet, de la suite ♡ on extrait la suite exacte

$$\mathrm{H}^{q-1}(X, \mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathbb{C}_p)$$

Or, par le lemme 2.6.5, $\mathrm{H}^q(X, \mathbb{C}_p) = 0$ pour $q \geq 1$, donc pour $q \geq 2$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_{D+p}) \cong \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D)$. Par récurrence sur $s(D)$, on a donc que pour tout diviseur D sur X et pour tout $q \geq 2$,

$$\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_D) \cong \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O})$$

or on sait par le théorème 2.6.3 que $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}) = 0$. Ceci termine la preuve. ∎

Si pour un faisceau $\mathfrak{F}$ d'espaces vectoriels sur un espace topologique X on note

$$\chi(\mathfrak{F}) := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim \mathrm{H}^n(X, \mathfrak{F})$$

chaque fois qu'on le peut, c'est-à-dire quand les espaces vectoriels considérés sont de dimensions finies et que la somme est finie, on peut alors reformuler le théorème de Riemman-Roch ainsi:

Si X est une surface de Riemann compacte et D est un diviseur sur X, alors

$$\chi(\mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D$$

où g est le genre de X.

On a un premier pas de fait vers des généralisations possibles.

CHAPITRE IV

FIBRÉS EN DROITES

La partie « fibré en droites » de l'analyse géométrique du théorème de Riemann-Roch va beaucoup plus loin que le contenu de ce chapitre. Nous verrons comment on peut approcher la notion de fibrés en droites par la cohomologie des faisceaux. Ensuite, nous verrons comment on peut associer un fibré en droites à un diviseur classique et vice-versa et pourquoi le faisceau des sections holomorphes du fibré associé au diviseur D est isomorphe à $\mathcal{O}_D$.

4.1 Fibrés en droites

Les fibrés jouent un rôle important en géométrie. Parmis les fibrés les plus simples, on trouve ceux où chaque fibre est un espace vectoriel complexe de dimension 1. On les appelle des « fibrés en droites ».

Définition 4.1.1 (Fibré en droites) *Soit X une surface de Riemann. Un* fibré en droites *sur X est la donnée*

- *d'un espace topologique L*
- *d'une projection $\pi : L \to X$ continue*

avec, si on note $L_U := \pi^{-1}(U)$ pour tout sous-ensemble U de X et $L_x := L_{\{x\}}$ pour $x \in X$, la donnée pour tout $x \in X$ d'une structure d'espace vectoriel complexe de *dimension 1 sur L_x. La donnée de l'ensemble de ces structures doit être telle que $\forall x \in X$, il existe un ouvert $U \ni x$ et un homéomorphisme*

$$\zeta_U : L_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}$$

qui commute avec la projection sur U (c'est-à-dire (projection sur U) $\circ \zeta_U = \pi\big|_{L_U}$*) et telle que $\zeta_U\big|_{L_x}$ soit un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Chaque ζ_U est appelé une trivialisation *et le U correspondant un* ouvert de trivialisation.

S'il existe une trivialisation globale $L \xrightarrow{\cong} X \times \mathbb{C}$, on dira que le fibré L est trivial.

On a promis un fibré en droites holomorphe mais on n'a, jusqu'ici, qu'un fibré topologique. Comme à l'habitude, ce sera sur les changements de cartes, c'est-à-dire les changements de trivialisations, qu'il faudra imposer de nouvelles conditions.

Regardons donc ces changements de trivialisations. Si U et V sont deux ouverts de trivialisation tels que $U \cap V \neq \varnothing$, alors pour $x \in U \cap V$, on note $g_{UV}(x)$ le nombre complexe c_0 défini par

$$\zeta_U \circ \zeta_V^{-1}\Big|_{\{x\}\times\mathbb{C}}(x, c) = (x, c_0 \cdot c)$$

Puisque les trivialisations sont des isomorphismes linéaires lorsque restreintes aux fibres, $g_{UV}(x)$ doit être non-nul.

Par abus de langage, on notera L l'espace L lui-même et toute la structure qui lui est associée. En suivant le même scénario que lors de la définition de surface de Riemann (voir page 8), on pourrait définir une notion d'atlas de fibré regroupant les trivialisations de L.

Définition 4.1.2 (Fibré en droites holomorphe) *Un fibré en droite L est un* fibré en droites holomorphe *si pour tout changement de trivialisations g_{UV}, on a*

$$g_{UV} \in \mathcal{O}^*(U \cap V)$$

où $\mathcal{O}^*$ est le faisceau des fonctions holomorphes partout non-nulles. (voir page 27)

Les changements de trivialisations satisfont naturellement

$$g_{UV} \cdot g_{VU} = 1$$

et

$$g_{UV} \cdot g_{VW} \cdot g_{WU} = 1 \qquad \text{sur } U \cap V \cap W.$$

Comme le montrent ces équations, si $\mathfrak{U}$ est le recouvrement de X donné par les ouverts de trivialisations, on obtient un cocycle $g = (g_{UV}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$ en considérant les changements de trivialisations.

Les trivialisations ζ_U ne sont pas canoniques, on peut en donner des différentes faisant le même travail. En effet, prenons $f_U \in \mathcal{O}^*(U)$ et posons

$$\begin{aligned} \zeta'_U :\ L_U &\longrightarrow U \times \mathbb{C} \\ \ell &\mapsto (x_\ell, f_U(x_\ell)c_\ell) \end{aligned}$$

où pour $\ell \in L_U$, on pose $\zeta_U(\ell) = (x_\ell, c_\ell)$. La fonction ζ'_U est bien une trivialisation de notre fibré en droite et les changements de trivialisations sont

$$g'_{UV} = \frac{f_U\big|_{U\cap V}}{f_V\big|_{U\cap V}} \cdot g_{UV}$$

Toute autre trivialisation de L peut être obtenue en donnant de semblables f_U.

Il faut ici faire attention un petit peu. Le faisceau $\mathcal{O}^*$ est un faisceau de groupes abéliens si on considère la multiplication des fonctions holomorphes. Donc, si on considère la cochaîne $(f_U) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$, on a $\delta(f_U) = (h_{UV})$ où $h_{UV} = f_U\big|_{U\cap V} / f_V\big|_{U\cap V}$ d'où

$$\frac{g'_{UV}}{g_{UV}} \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*).$$

Inversement, si on considère $g = (g_{UV}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$, on peut construire un fibré en droites tel que les g_{UV} soient les changements de trivialisations. On n'a qu'à considérer

$$L' = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U \times \mathbb{C} \times \{U\}$$

avec la topologie induite de $X \times \mathbb{C} \times \mathfrak{U}$ où $\mathfrak{U}$ est munie de la topologie discrète. On quotiente ensuite L' par la relation d'équivalence $\doteqdot$ où

$$(x, v, U) \doteqdot (y, w, V) \Longleftrightarrow x = y \text{ et } v = g_{UV}(x)w$$

afin d'obtenir le fibré $L_g := L'/\doteqdot$ voulu. Si U est un ouvert du recouvrement $\mathfrak{U}$, on a la trivialisation $L_U \to U \times \mathbb{C}$ donnée par l'inverse de la projection $U \times \mathbb{C} \times \{U\} \to L$ suivie de l'identification $U \times \mathbb{C} \times \{U\} \cong U \times \mathbb{C}$.

Soit $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ deux recouvrements de X et $g \in \mathrm{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$, $h \in \mathrm{H}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}^*)$. Prenons un recouvrement $\mathfrak{U}'$ tel que $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}' < \mathfrak{V}$. Posons

$$g' := \varphi_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}}(g) \quad \text{et} \quad h' := \varphi_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{V}}(h)$$

On vient de voir que $L_{g'} = L_{h'}$ si et seulement si $g' = h'$. Puisque $L_g = L_{g'}$ et $L_h = L_{h'}$, on a $L_g = L_h$ si et seulement si $g' = h'$.

Donc $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ s'identifie à l'ensemble des fibrés en droites holomorphes sur X.

4.2 Les diviseurs et les fibrés en droite

Soit D un diviseur sur une surface de Riemann X et $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X tel que pour tout $U \in \mathfrak{U}$, il existe une fonction $f_U \in \mathcal{M}(U)$ telle que $\mathfrak{D}(f_U) = D\Big|_U$. Si $U \cap V \neq \varnothing$ pour $U, V \in \mathfrak{U}$, puisque f_U et f_V ont les mêmes zéros et les mêmes pôles sur $U \cap V$,

$$g_{UV} := \frac{f_U\Big|_{U\cap V}}{f_V\Big|_{U\cap V}}$$

est un élément de $\mathcal{O}^*(U \cap V)$. Rappelons-nous que si $U \cap V = \varnothing$, $f_U\Big|_{U\cap V} = 1$ dans le faisceau $\mathcal{O}^*$ car $\mathcal{O}^*(\varnothing)$ est le groupe trivial $\{1\}$. De plus, sur $U \cap V \cap W$,

$$g_{WU} \cdot g_{UV} \cdot g_{VW} = \frac{f_W}{f_U} \cdot \frac{f_U}{f_V} \cdot \frac{f_V}{f_W} = 1$$

donc $(g_{UV}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$. Soit g l'élement de $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ correspondant à ce cocycle. On pose $L_D := L_g$.

Assurons-nous maintenant qu'il existe toujours un tel recouvrement $\mathfrak{U}$. Soit I un ensemble d'indices ne contenant pas 0 (nous utiliserons cet indice prévilégié dans quelques instants) et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de points de X telle que $\{p_i \mid i \in I\} = X \setminus D^{-1}(0)$.

Posons $U_0 := D^{-1}(0)$ et prenons, pour $i \in I$, un ouvert de carte U_i centré en p_i. Choisissons nos U_i de telle sorte que $U_i \cap U_j = \varnothing$ si $i, j \in I$ et $i \neq j$. C'est possible puisque $X \setminus D^{-1}(0)$ est fermé et discret.

Ensemble, les U_i ($i \in I$) et U_0 recouvrent X. Sur U_0, on choisit la fonction constante égale à 1, c'est-à-dire $f_{U_0} \equiv 1$. Pour $i \in I$, considérons le fait que U_i est un ouvert de carte centré en p_i, on pose alors $f_{U_i}(z) = z^{D(p_i)}$. On a bien $f_{U_i} \in \mathcal{M}(U_i)$ et $\mathfrak{D}(f_{U_i}) = D\Big|_{U_i}$. Il est donc possible de trouver un recouvrement de X qui nous permet de construire L_D, quel que soit le diviseur D sur X.

Si $D \sim D'$, il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que $D - D' = \mathfrak{D}(f)$. Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X pour chaque ouvert duquel il existe une fonction $f'_U \in \mathcal{M}(U)$ satisfaisant $\mathfrak{D}(f'_U) = D'\Big|_U$, $U \in \mathfrak{U}$. Si on pose $f_U := f\Big|_U \cdot f'_U$ on a que $\mathfrak{D}(f_U) = \mathfrak{D}(f\Big|_U) + \mathfrak{D}(f'_U) = \mathfrak{D}(f)\Big|_U + D'\Big|_U = D\Big|_U$. Les fonctions $g_{UV} := \frac{f_U}{f_V}$ définissent donc le fibré L_D tout comme les $g'_{UV} := \frac{f'_U}{f'_V}$ définissent le fibré $L_{D'}$. Or

$$g_{UV} = \frac{f_U}{f_V} = \frac{f \cdot f'_U}{f \cdot f'_V} = \frac{f'_U}{f'_V} = g'_{UV}$$

donc $L_D = L_{D'}$ et reciproquement $L_D = L_{D'}$ implique que $D \sim D'$.

En somme, si on note $\mathrm{Pic}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de diviseurs sur X modulo la relation d'équivalence $\sim$, et si on garde en tête que $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ s'identifie à l'ensemble des fibrés en droites holomorphes sur X, on a alors une injection

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*).$$

4.3 Les sections holomorphes et méromorphes

On ne saurait parler de fibrés sans parler de sections. En voici une définition:

Définition 4.3.1 (Section) *Si $\pi : L \to X$ est un fibré en droites et U est un ouvert de X, une application continue $s : U \to L$ est appelée une* section de L au-dessus de U *si $\pi \circ s(u) = u$ pour tout $u \in U$.*

Si on se donne un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X et des trivialisations $\eta_i : L_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$, on peut représenter toute section $s : U \to L$ par

$$\eta_i(s(x)) = (x, s_i(x))$$

sur $U_i \cap U$. La famille $(s_i)_{i\in I}$ est appelée une représentation de s associée aux trivialisations η_i.

Réciproquement, lorsque sont données des fonctions $s_i : U \cap U_i \to \mathbb{C}$ compatibles avec les changements de trivialisations (c'est-à-dire pour $x \in U_i \cap U_j \cap U,\ s_i(x) = g_{U_iU_j}(x) \cdot s_j(x)$), on a légitimement une section $s : U \to L$ correspondante.

Définition 4.3.2 (Section holomorphe) *Si L est un fibré en droites holomorphe sur X et $s : U \to L$ est une section de L au-dessus d'un ouvert U de X alors s est appelée une* section holomorphe *de L au-dessus de U si pour une représentation associée (s_i), les fonctions s_i sont holomorphes.*

On peut bien sûr additionner et soustraire des sections de L puisque chaque fibre est un espace vectoriel. On sait aussi multiplier une section par un nombre complexe parce qu'on sait le faire dans chaque fibre. On a donc un espace vectoriel de sections au-dessus de chaque ouvert de X. La donnée de ces espaces vectoriels et des homomorphismes naturels de restriction aux ouverts plus petits forme un faisceau sur X. On note ce faisceau $\mathcal{L}$ (ou $\mathcal{L}_{\text{truc}}$ pour le fibré L_{truc}).

Définition 4.3.3 (Pôle d'une section) *Soit L un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann X. Soit U un ouvert de X. Pour $p \in U$, une section holomorphe $s : U \setminus \{p\} \to L_U$ a* un pôle d'ordre k en p *si sa représentation associée dans un* *ouvert de trivialisation assez petit autour de p peut s'écrire $\sum_{n\geq -k} a_n z^n$ où $0 < k < \infty$ avec $a_{-k} \neq 0$.*

Définition 4.3.4 (Section méromorphe) *Pour un fibré en droites holomorphe L sur une surface de Riemann X, si $s \in \mathcal{L}(U \setminus P)$ où U est un ouvert de X et P est un sous-ensemble discret et fermé de U et si pour tout $p \in P$, s a un pôle en p, on dit que s est une* section méromorphe de U dans L.

Si $s : U \to L$ est une section méromorphe non-triviale, c'est-à-dire qui n'est pas nulle partout, on peut définir le diviseur des zéros et des pôles de s comme on l'a fait plus tôt pour les fonctions méromorphes sur U, qui ne sont en réalité que des sections méromorphes du fibré trivial $U \times \mathbb{C}$ sur U. On notera donc encore ce diviseur $\mathfrak{D}(s)$.

4.4 Vers une généralisation de Riemann-Roch

Théorème 4.4.1 *Si $D = \mathfrak{D}(s)$ pour une section globale méromorphe non-triviale $s : X \to L$, on a alors un isomorphisme de préfaisceaux entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{O}_D$.*

Preuve Soit U un ouvert de X, on pose

$$\begin{aligned} \psi_U : \mathcal{O}_D(U) &\longrightarrow \mathcal{L}(U) \\ f &\longmapsto f \cdot s\big|_U \end{aligned}$$

Cette fonction est bien définie car si $f \in \mathcal{O}_D(U)$ alors $\mathfrak{D}(f) \geq -D\big|_U$. On a donc $\mathfrak{D}(fs\big|_U) = \mathfrak{D}(f) + \mathfrak{D}(s\big|_U) \geq -D\big|_U + D\big|_U = 0$ donc fs est holomorphe.

Si $t \in \mathcal{L}(U)$ est une section holomorphe de L au-dessus de U alors $f := \frac{t}{s\big|_U}$ est bien dans $\mathcal{O}_D(U)$ car $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(t) - \mathfrak{D}(s\big|_U) \geq 0 - D\big|_U$ et on a $\psi_U(f) = t$ donc ψ_U est surjective.

Par ailleurs, si $fs = \psi_U(f) = \psi_U(g) = gs$ alors on a bien $f = g$. Notons que si f et g n'étaient que de simples fonctions sans aucune propriété différentielle, rien n'obligerait f et g à être égales aux zéros ou aux pôles de s. Mais le fait que f, g et s soient méromorphes et que les produits fs et gs soient holomorphes imposent des conditions locales très strictes qui obligent $f = g$. ψ_U est donc injective.

Bien sûr, $\psi_U(f - g) = \psi_U(f) - \psi_U(g)$ donc ψ_U est un isomorphisme de groupes. Encore plus, si $c \in \mathbb{C}$, $\psi_U(cf) = c\psi_U(f)$, alors ψ_U est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Bien évidemment, pour $U_1 \subset U_2$ et $f \in \mathcal{O}_D(U_2)$ on a

$$\psi_{U_2}(f)\Big|_{U_1} = \psi_{U_1}\Big(f\Big|_{U_1}\Big)$$

La famille d'isomorphismes (ψ_U) est un morphisme de préfaisceaux, d'où la conclusion. ■

Si D est un diviseur sur X, les $f_U \in \mathcal{M}(U)$ tels que $\mathfrak{D}(f_U) = D\Big|_U$ pour des ouverts U recouvrant X définissent une section globale non-triviale du fibré L_D. Par le théorème qu'on vient de prouver, on obtient

$$\mathcal{L}_D \cong \mathcal{O}_D.$$

On pourrait montrer qu'en fait tout fibré en droites holomorphe admet une section globale méromorphe non-triviale. On a donc une bijection $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ qui est même un homomorphisme de groupes. Pour en savoir davantage, on peut consulter (Forster, 1981) à la section 29.

Définition 4.4.2 (Degré d'un fibré) *Soit L un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann X compacte. On définit le degré de L comme étant*

$$\deg(L) := \deg(D)$$

où $D = \mathfrak{D}(s)$ pour une section globale méromorphe non-triviale s sur X.

On va maintenant s'assurer que $\deg(L)$ est bien défini. Si s et s' sont des sections méromorphes de L, alors en chaque point $x \in X$ sauf aux pôles, $s(x)$ et $s'(x)$ sont deux vecteurs d'un espace vectoriel complexe de dimension 1. Puisque s et s' sont méromorphes, on a une fonction $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que $s = fs'$ d'où

$$\mathfrak{D}(s) = \mathfrak{D}(f) + \mathfrak{D}(s'),$$

c'est-à-dire $\mathfrak{D}(s) \sim \mathfrak{D}(s')$. Donc $\deg(\mathfrak{D}(s)) = \deg(\mathfrak{D}(f)) + \deg(\mathfrak{D}(s')) = \deg(\mathfrak{D}(s'))$, et $\deg(L)$ est bien défini.

On peut maintenant reformuler le théorème de Riemann-Roch ainsi:

Si L est un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann compacte X alors

$$\chi(\mathcal{L}) = 1 - g + \deg(L)$$

où g est le genre de X et $\mathcal{L}$ est le préfaisceau des sections holomorphes de L.

Cette reformulation est bien valide car si D est le diviseur d'une section globale méromorphe de L non triviale, on a

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D) = 1 - g + \deg(L)$$

Cette reformulation laisse le champ libre aux généralisations à des espaces topologiques localement homéomorphes à des ouverts de $\mathbb{C}^n$ (au lieu de $\mathbb{C}$ dans le cas des surfaces de Riemann) pour n quelconque, avec changements de cartes holomorphes. En effet, la notion de fibré en droites se manipule plus facilement dans ce cas que la notion de diviseur. Mais il reste encore à comprendre le genre en dimension supérieure et c'est le travail d'Hirzebruch.

Le reste de l'histoire est sous la surface de l'eau, invisible à nos yeux pour l'instant. Ce mémoire avait pour but de ne révéler que la pointe de l'iceberg et de susciter la curiosité chez le lecteur et le rédacteur. Ça a fonctionné dans le second cas. Et dans le premier?

Au lieu de poursuivre vers l'avant, on peut aussi faire un pas de côté et explorer les diverses applications du théorème de Riemann-Roch. Le but du prochain chapitre est justement de survoler une de ces applications.

CHAPITRE V

DUALITÉ DE SERRE ET COURBES ELLIPTIQUES

Dans ce dernier chapitre, nous donnons un exemple d'application du théorème de Riemann-Roch. Pour effectuer nos calculs, nous aurons besoin du théorème de dualité de Serre. Commençons par expliciter ce dernier.

5.1 Dualité de Serre

La suite

$$0 \longrightarrow \Omega(U) \longrightarrow \mathfrak{E}^{1,0}(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathfrak{E}^{(2)}(U) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$. En effet, tout élément de $\mathfrak{E}^{(2)}(U)$ s'écrit $g\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z$ avec $g \in \mathfrak{E}(U)$. Par le lemme de Dolbeault, on sait qu'il existe $f \in \mathfrak{E}(U)$ avec $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$ donc $\mathrm{d}(f\mathrm{d}z) = g\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z$ et d surjective, c'est-à-dire que la suite est exacte en $\mathfrak{E}^{(2)}(U)$. Elle l'est bien évidemment en $\Omega(U)$ puisqu'on considère l'inclusion des formes holomorphes dans les formes C^∞ de type (1,0). On a par ailleurs déjà vu que $\omega \in \Omega(U) \Longleftrightarrow \mathrm{d}\omega = 0$ donc la suite est exacte en $\mathfrak{E}^{1,0}$.

Soit X une surface de Riemann compacte. Pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, on peut trouver $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$ tel que chaque ouvert de $\mathfrak{U}'$ soit un ouvert de carte. La suite

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow \mathfrak{E}^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathfrak{E}^{(2)} \longrightarrow 0$$

satisfait donc l'hypothèse du théorème 2.4.1. On a par conséquent la suite exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\Omega) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathfrak{E}^{1,0}) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathrm{H}^0(X,\mathfrak{E}^{(2)}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "="'] & \mathrm{H}^1(X,\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathrm{H}^1(X,\mathfrak{E}^{1,0}) \arrow[d, "="'] \\
 & & \mathfrak{E}^{1,0}(X) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathfrak{E}^{(2)}(X) \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{H}^1(X,\Omega) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donc $\mathrm{H}^1(X,\Omega) = \mathrm{Im}(\Delta) \cong \mathfrak{E}^{(2)}(X)/\ker(\Delta) = \mathfrak{E}^{(2)}(X)/\mathrm{d}\mathfrak{E}^{1,0}(X)$. Soit $h \in \mathrm{H}^1(X,\Omega)$ et $\omega \in \mathfrak{E}^{(2)}(X)$ tel que $h = \omega + \mathrm{d}\mathfrak{E}^{1,0}(X)$. On pose

$$\mathrm{Res}(h) := \frac{1}{2\pi i}\iint_X \omega$$

Cette fonction est bien définie car si $\omega' = \omega + \mathrm{d}\eta$ alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\iint_X \omega' &= \frac{1}{2\pi i}\iint_X \omega + \frac{1}{2\pi i}\iint_X \mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\iint_X \omega + 0 \quad \text{(par le théorème de Stokes)}
\end{aligned}$$

Rappelant que $\mathcal{M}^{(1)}$ est le faisceau des formes méromorphes sur X, on pose pour un diviseur D sur X,

$$\Omega_D(U) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U) \mid f = 0 \text{ ou } \mathfrak{D}(\omega) \geq -D\big|_U\}$$

Un couplage parfait

Soit U un ouvert de notre surface de Riemann. L'application

$$\begin{aligned}
\Omega_{-D}(U) \times \mathcal{O}_D(U) &\longrightarrow \Omega(U) \\
(\omega, f) &\longmapsto f\omega
\end{aligned}$$

induit un application linéaire

$$\psi : \mathrm{H}^0(X,\Omega_{-D}) \times \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_D) \to \mathrm{H}^1(X,\Omega).$$

En effet, soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. On a

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathfrak{U}} : \mathrm{H}^0(\mathfrak{U},\Omega_{-D}) \times \mathrm{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_D) &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathfrak{U},\Omega) \\
\Big(\omega, (f_{ij}) + B^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_D)\Big) &\longmapsto \left(f_{ij}\omega\Big|_{U_{ij}}\right) + B^1(\mathfrak{U},\Omega)
\end{aligned}$$

Cette application est bien définie. Si $f := (f_{ij})_{(i,j)\in I^2} \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ il existe $g := (g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ tel que $f = \delta(g)$. On a alors

$$\begin{aligned} \Big(\delta\big((g_i\omega\big|_{U_i}))\Big)_{ij} &= g_j\omega\big|_{U_{ij}} - g_i\omega\big|_{U_{ij}} \\ &= (g_j - g_i)\omega\big|_{U_{ij}} \\ &= f_{ij}\omega\big|_{U_{ij}} \end{aligned}$$

d'où $(f_{ij}\omega\big|_{U_{ij}})_{(i,j)\in I^2} \in B^1(\mathfrak{U}, \Omega)$ donc $\psi_{\mathfrak{U}}$ est bien défini.

Par ailleurs, si $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ sont deux recouvrements de X, on a bien $\varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} \circ \psi_{\mathfrak{U}}(\omega, \cdot) = \psi_{\mathfrak{V}}(\omega, \cdot) \circ \varphi^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ donc les $\psi_{\mathfrak{U}}$ induisent l'application ψ qu'on voulait plus haut.

Puisqu'on a $\mathrm{Res} : \mathrm{H}^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$, on a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{H}^0(X, \Omega_{-D}) \times \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \mathbb{C}$$

définie par $\mathrm{Res} \circ \psi$. Pour un espace vectoriel complexe V, si on note V^* son dual, l'espace vectoriel complexe des applications $\mathbb{C}$-linéaires de V dans $\mathbb{C}$, on a le théorème suivant

Théorème 5.1.1 (Dualité de Serre) *Soit X un surface de Riemann compacte et D un diviseur sur X. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(X, \Omega_{-D}) &\longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D)^* \\ \omega &\longmapsto \big(\cdot \mapsto \langle \omega, \cdot \rangle\big) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Preuve Voir section 17 chapitre 2 de (Forster, 1981). ∎

5.2 L'apparition du diviseur canonique

On dit d'un diviseur K qu'il est un *diviseur canonique* s'il est le diviseur d'une 1-forme méromorphe non-nulle. Soit $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ non-nulle et $K := \mathfrak{D}(\omega)$ un diviseur canonique.

On a un isomorphisme de faisceaux

$$\begin{aligned} m_U : \mathcal{O}_{K-D}(U) &\cong \Omega_{-D}(U) \\ f &\longmapsto f\omega\Big|_U \end{aligned}$$

La fonction m_U est bien définie car $\mathfrak{D}(f\omega\Big|_U) = \mathfrak{D}(\omega)\Big|_U + \mathfrak{D}(f) = K\Big|_U + \mathfrak{D}(f) \geq K\Big|_U - (K-D)\Big|_U = -(-D\Big|_U)$. Si $f\omega\Big|_U = g\omega\Big|_U$ alors $f = g$ donc m_U est injective. Par ailleurs, si $\omega_1 \in \Omega_{-D}(U)$ il existe alors $f_1 \in \mathcal{M}(U)$ tel que $f_1\omega\Big|_U = \omega_1$ donc $\mathfrak{D}(f_1)+K = \mathfrak{D}(f_1) + \mathfrak{D}(\omega)\Big|_U = \mathfrak{D}(f_1\omega\Big|_U) = \mathfrak{D}(\omega_1) \geq -\left(-D\Big|_U\right)$ d'où $\mathfrak{D}(f_1) \geq -(K-D)\Big|_U$ et $f_1 \in \mathcal{O}_{K-D}$ et m_U est surjective. Il est par ailleurs évident que m_U commute avec les restrictions de $\mathcal{O}_{K-D}$ et Ω_{-D} donc la famille (m_U) définit bien un isomorphisme de faisceaux.

Comme la dimension de l'espace $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D)$ est finie par le théorème de Riemann-Roch, cet espace est isomorphe à son dual. Considérant cela et le théorème de dualité de Serre, on a $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \cong \mathrm{H}^0(X, \Omega_{-D}) \cong \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$. Ce qui nous permet de réécrire le théorème de Riemann-Roch à la mode de 1866

$$\dim L_D = \dim L_{K-D} + 1 - g + \deg D$$

où $L_D := \mathcal{O}_D(X) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$. Ceci explique, comme promis dans l'introduction, l'apparition d'un diviseur canonique dans les travaux de Roch.

Corollaire 5.2.1 *Soit K un diviseur canonique sur une surface de Riemann compacte. On a alors*

$$\deg K = 2g - 2.$$

Preuve En posant $D = 0$, on a $\dim L_0 = \dim L_K + 1 - g + \deg 0$. Or $\dim L_0 = \dim \mathcal{O}(X) = 1$ ce qui implique $\dim L_K = g$.

En posant $D = K$, on a $g = \dim L_K = \dim L_{K-K} + 1 - g + \deg K = 1 + 1 - g + \deg K$ d'où la conclusion. ■

5.3 Courbes elliptiques et forme de Weierstrass

Qui n'a pas entendu parler de la preuve d'Andrew Wiles du « dernier théorème » de Fermat? Le grand public eut même droit à une introduction aux mathématiques modernes par un vidéo intitulé *The Proof* créé pour la chaine de télévision NOVA. La pierre angulaire des travaux de Wiles repose sur une conjecture due à Shimura et Taniyama qui lie les courbes elliptiques et les formes modulaires. Mais qu'est-ce qu'une courbe elliptique?

Définition 5.3.1 *Une* courbe elliptique *est un couple* (X, E) *où* X *est une surface de Riemann compacte de genre 1 et* $E \in X$*.*

Notons ici la subtilité du langage: on dit « surface » en pensant à un espace de dimension 2 et « courbe » en pensant à un espace de dimension 1. Nos surfaces de Riemann sont à la fois des espaces de dimension 2 réelle et des espaces de dimension 1 complexe, ce qui fait qu'on peut utiliser ces deux désignations pour le même objet.

Le point distingué sur notre surface de Riemann est l'élément neutre d'une opération de groupe abélien sur X qu'on représente souvent de la façon suivante:

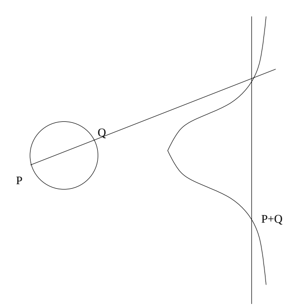

Figure 5.1 Exemple d'addition sur une courbe elliptique

la droite joignant P au point Q coupe X en un troisième point R et la droite joignant le point E au point R coupe X en un troisième point qui sera $P + Q$. Ici, on place le point E à l'infini.

Pourquoi un tel dessin est-il valide? Il se trouve qu'on peut écrire chaque courbe elliptique sous une forme normale

$$C = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^2 \mid zy^2 = x^3 + axyz + bx^2z + cxz^2 + dyz^2 + ez^3\}$$

où $E = [0 : 1 : 0]$. On appelle cette forme la forme normale de Weierstrass.

Rappelons brièvement que

$$\mathbb{C}P^2 := \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}{\simeq}$$

où la relation d'équivalence $\simeq$ est définie par

$$(x, y, z) \simeq (x_1, y_1, z_1) \Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (x, y, z) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

On note alors $[x : y : z]$ la classe de (x, y, z) modulo $\simeq$. On peut associer $\mathbb{C}^2$ à un sous-ensemble de $\mathbb{C}P^2$, c'est-à-dire $\{[x : y : 1] \in \mathbb{C}P^2 \mid x, y \in \mathbb{C}\}$. Le point $[0 : 1 : 0]$ est dans ce cas là considéré comme à l'infini.

Pour réaliser le dessin précédent, il suffit de regarder seulement ce qui se passe dans $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$.

Théorème 5.3.2 (Forme normale de Weierstrass) *Soit (X, E) une courbe elliptique. Il existe alors $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un biholomorphisme $\phi : X \to C$ où*

$$C := \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^2 \mid y^2z = x^3 + axyz + bx^2z + cxz^2 + dyz^2 + ez^3\}.$$

On a par ailleurs $\phi(E) = [0 : 1 : 0]$.

Preuve Afin de ne pas alourdir la présentation avec de nombreux préalables, nous n'allons que définir ϕ. C'est la partie de la preuve qui demande l'utilisation du théorème de Riemann-Roch. Pour une preuve qu'il s'agit un isomorphisme de courbes elliptiques, on peut consulter la section 3 du chapitre 3 de (Silverman, 1986) où tout est expliqué dans un contexte de géométrie algébrique.

Notons D le diviseur sur X qui vaut 1 en E et 0 ailleurs. Pour $n > 0$, $\deg nD = n$ Soit K un diviseur canonique sur X. Notons que la dimension de $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{nD})$ est finie par le théorème de Riemann-Roch. Par le théorème de dualité de Serre, on a alors $\dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{nD}) = \dim \mathrm{H}^0(X, \Omega_{-nD})$. Rappelons-nous qu'on a montré à la section 5.2 que $\Omega_{-nD}(X) \cong \mathcal{O}_{K-nD}(X)$ d'où

$$\dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{nD}) = \dim \mathrm{H}^0(X, \Omega_{-nD}) = \dim \Omega_{-nD}(X) = \dim \mathcal{O}_{K-nD}(X);$$

mais si $f \in \mathcal{O}_{K-nD}(X)$ et $f \neq 0$, on a $\deg(\mathfrak{D}(f)) \geq \deg(-K + nD) = -\deg(K) + \deg(nD) = n > 0$, puisque $\deg K = 0$ en vertu du corollaire 5.2.1. Or f est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte, on a donc une contradiction car $\deg(\mathfrak{D}(f)) = 0$. Ceci implique que $\dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{nD}) = 0$.

Pour $n > 0$, le théorème de Riemann-Roch nous dit alors

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}_{nD}(X) &= \dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_{nD}) - \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_{nD}) \\ &= 1 - g + \deg(nD) \\ &= 1 - 1 + n \\ &= n \end{aligned}$$

Notons qu'on a $\mathcal{O}_D(X) \subset \mathcal{O}_{2D}(X) \subset \mathcal{O}_{3D}(X) \subset \cdots$. L'espace $\mathcal{O}_D(X)$ contient bien sûr toutes les fonctions constantes. Par égalité des dimensions, on a alors $\mathcal{O}_D(X) = \mathbb{C}$ et la fonction constante 1 est une base de $\mathcal{O}_D(X)$. Si $\{1, f\}$ est une base de $\mathcal{O}_{2D}(X)$, f doit avoir un pôle d'ordre 2 en E sinon on aurait $f \in \mathcal{O}_D(X)$ et par conséquent, f ne pourrait pas être linéairement indépendant avec 1. Si $\{1, f, g\}$ est une base de $\mathcal{O}_{3D}(X)$, g doit forcément avoir un pôle d'ordre 3 en E sinon $g \in \mathcal{O}_{2D}(X)$ et g ne peut engendrer la partie manquante de $\mathcal{O}_{3D}(X)$. En E, la fonction méromorphe f^2 sur X a un pôle d'ordre 4 donc $f^2 \in \mathcal{O}_{4D}(X) \setminus \mathcal{O}_{3D}(X)$ et $\{1, f, g, f^2\}$ est une base de $\mathcal{O}_{4D}(X)$ puisque $\dim \mathcal{O}_{4D}(X) = 4$. De la même façon, on a $\mathrm{ord}_E fg = -5$ et $\{1, f, g, f^2, fg\}$ est une base de $\mathcal{O}_{5D}(X)$.

On arrive maintenant au point critique de la discussion. Puisque $\mathrm{ord}_E f^3 = -6$, on a bien sûr que $f^3 \in \mathcal{O}_{6D}(X) \setminus \mathcal{O}_{5D}(X)$ donc $\{1, f, g, f^2, fg, f^3\}$ est une base de $\mathcal{O}_{6D}(X)$. Or, on a aussi $g^2 \in \mathcal{O}_{6D}(X)$. Il existe donc des nombres complexes $A_1, \ldots, A_6$ tels que

$$g^2 = A_1 f^3 + A_2 fg + A_3 f^2 + A_4 f + A_5 g + A_6.$$

Par ailleurs, puisque $g^2 \in \mathcal{O}_{6D}(X) \setminus \mathcal{O}_{5D}(X)$, on doit absolument avoir $A_1 \neq 0$. Remplaçons f par $A_1 f$ et g par $A_1^2 g$. On a alors

$$A_1^4 g^2 = A_1^4 f^3 + A_2 A_1^3 fg + A_3 A_1^2 f^2 + A_4 A_1 f + A_5 A_1^2 g + A_6$$

d'où

$$g^2 = f^3 + \frac{A_2}{A_1} fg + \frac{A_3}{A_1^2} f^2 + \frac{A_4}{A_1^3} f + \frac{A_5}{A_1^2} g + \frac{A_6}{A_1^4}$$

ou

$$g^2 = f^3 + afg + bf^2 + cf + dg + e$$

pour des constantes $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$.

La fonction

$$\begin{aligned} \phi : \quad X &\longrightarrow \mathbb{C}P^2 \\ p &\longmapsto [f(p) : g(p) : 1] \end{aligned}$$

envoie X dans la courbe C définie dans l'énoncé du théorème.

Par ailleurs, $\phi(E) = [0 : 1 : 0]$ comme prédit. En effet, lorsque p tend vers E, $\frac{f}{g}(p) \to 0$ et $\frac{1}{g}(p) \to 0$ d'où

$$\phi(E) = [f(E) : g(E) : 1] = [\frac{f}{g}(E) : 1 : \frac{1}{g}(E)] = [0 : 1 : 0]$$

Ceci termine la discussion. ∎

CONCLUSION

Toute aventure doit se terminer un jour. Celle de l'introduction au fameux théorème de Riemann-Roch se termine ici. Rappelons ici les faits saillants qui ont marqué notre voyage en ces terres mathématiques nouvelles.

Avant de partir, nous nous préparions à l'aventure avec un entraînement intensif. Nous avons pu remettre à jour nos connaissances concernant l'analyse complexe, les surfaces de Riemann, les formes différentielles, l'intégration, l'analyse fonctionnelle et les suites exactes. Nous avons même dû, au besoin, consulter les grands maîtres du savoir cachés dans la bibliothèque.

Tout commença par un séjour initiatique dans la catégorie des faisceaux et l'apprentissage de la cohomologie de Čech. Les principaux personnages rencontrés furent le théorème d'existence d'une longue suite exacte en cohomologie, allié précieux lorsque viendra le moment d'affronter la cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_D$, et le fidèle théorème de Leray qui nous aidera à montrer que le genre des surfaces de Riemann compactes est fini.

Puis, vint le moment où nous dûmes affronter la terrible épreuve de Roch: reprendre l'inégalité de Riemann et en faire une égalité. Nous étions cependant bien équipés avec nos techniques faisceautiques du vingtième siècle si bien qu'aidés par le puissant théorème d'existence d'une longue suite exacte, la preuve se réduisit à une simple preuve par récurrence. L'étape initiale de notre récurrence fut de montrer que le genre d'une surface de Riemann compacte est fini, ce qui ne fut pas de tout repos.

Après avoir réussi l'épreuve de Roch, nous eûmes accès à un état second où nous pûmes voir les choses sous un autre angle. La notion classique de diviseur apparaissait maintenant, merci à la sagesse de Weil, dans un contexte de fibrés en droites. Après avoir constaté l'isomorphisme entre le faisceau $\mathcal{L}_D$ des sections du fibré L_D et le faisceau $\mathcal{O}_D$ qui nous intéressait tant un peu plus tôt, nous fûmes en mesure de comprendre comment le théorème de Riemann-Roch pouvait être généralisé aux variétés complexes de dimension supérieure.

Avant de regagner le confort du monde non-mathématique, nous avons pris soin de jeter un coup d'oeil sur le magnifique paysage de la vallée des applications. Aidé par un nouveau compagnon de route, le mystérieux théorème de dualité de Serre, nous aperçûmes la forme de Weierstrass qui permet d'exprimer aisément les courbes elliptiques.

Mais aussitôt revenu, le lecteur a des questions... Qui était ce théorème de dualité de Serre? Un mystificateur ou un puissant sorcier? Peut-on lui faire confiance? Et ces sections méromorphes qui jaillissent, semble-t-il, naturellement vers les fibrés en droite holomorphes, existent-elles? Dans quelle mesure peut-on généraliser le théorème de Riemann-Roch? Et quel est donc ce genre de Todd qui intéressa le légendaire Hirzebruch? Et cette théorie de cohomologie, comment est-elle liée aux théories que je connais déjà? ...

Le rédacteur s'est lui-même posé une question: « Et les trous? » Habitué au fait que le genre d'une surface soit le nombre de trous, il prépara un plan pour une autre aventure à vivre un de ces jours où les tracas du monde non-mathématique l'obligeront à se laisser à nouveau glisser dans la rigueur du monde mathématique. Il vous le laisse en appendice.

APPENDICE A

DISCUSSION SUR LE GENRE ET LE NOMBRE DE TROUS

Les topologues amateurs ou professionnels sont habitués à voir le genre comme étant le nombre de trous. Nous allons ici dessiner le chemin qui mène à prouver que ce qu'on a appelé le genre dans ce mémoire est bien le nombre de trous.

Tout au long de cet appendice, X désigne une surface de Riemann compacte et

$$g := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}).$$

Classification des surfaces

Une surface de Riemann est en particulier une variété topologique de dimension 2 connexe, ce qu'on appelle une surface. Nos surfaces de Riemann sont sans bord: tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un point est dans le bord de X s'il existe un voisinage de ce point homéomorphe à un ouvert du demi-plan supérieur $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ tel que l'homéomorphisme envoie notre point sur la bordure de H. Ce n'est évidemment pas le cas ici.

Les mathématiciens ont montré qu'on peut classifier les surfaces connexes compactes et sans bord. Dans le cas où notre surface est orientable, c'est le seul cas qui nous intéresse, la classification consiste à compter le nombre de trous, c'est-à-dire que X est homéomorphe à la surface d'un beigne avec un certain nombre de trous et c'est ce nombre qui nous permet de classifier la surface. Le premier chapitre de (Massey, 1967) est consacré à l'étude de cette classification. Considérant cela, posons

$$\widehat{g} := \text{ nombre de trous de } X.$$

Cette donnée détermine topologiquement X.

Groupe fondamental des surfaces orientables

Le groupe fondamental d'un espace topologique E est le groupe des lacets considérés à homotopie près avec la concaténation comme opération de groupe. C'est le premier groupe d'homotopie d'un espace et il s'agit d'un invariant topologique. On note $\pi_1(E, p)$ ce groupe d'homotopie relativement au point de base p pour les lacets. Comme notre surface de Riemann X est connexe, peut importe le point de base choisi, les groupes obtenus sont isomorphes. Abstraitement, on peut donc parler de $\pi_1(X)$.

On peut montrer, voir chapitre 4 section 5 de (Massey, 1967), que

$$\pi_1(X) = \left\langle x_1, y_1, \ldots, x_{\widehat{g}}, y_{\widehat{g}} \mid \prod_{i=1}^{\widehat{g}} [x_i, y_i] \right\rangle$$

où $[a, b]$ est le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$ et où la notation $< R|R >$ signifie qu'on considère le groupe engendré par les générateurs G soumis aux relations $R = e$, c'est-à-dire le quotient du groupe libre engendré par les générateurs par le sous-groupe normal engendré par les relations.

Homologie singulière et groupe fondamental

Lorsqu'on étudie la topologie algébrique, on considère un autre invariant topologique qui est, contrairement au groupe fondamental, toujours commutatif. Il s'agit des groupes d'homologie singulière $\mathrm{H}_q(X)$. Pour une définition de cette théorie d'homologie, on peut consulter (Bredon, 1993) chapitre IV section 1.

Un théorème dû à Hurewicz stipule que $\mathrm{H}_1(X)$ est l'abélianisé de $\pi_1(X)$. En d'autres termes, si $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ est le sous-groupe de X engendré par les commutateurs de

$\pi_1(X)$, on a

$$\mathrm{H}_1(X) \cong \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}.$$

Pour une preuve du théorème d'Hurewicz, on peut consulter la section 3 du chapitre IV de (Bredon, 1993).

Considérant la description du $\pi_1(X)$ qu'on a donnée plus haut, $\mathrm{H}^1(X)$ est un groupe abélien libre sur $2\widehat{g}$ générateurs.

Théorème des coefficients universels

Le complexe considéré dans la fabrication de l'homologie singulière est une suite de $\mathbb{Z}$-modules. On s'intéresse cependant au cas où l'anneau de coefficients n'est pas nécessairement $\mathbb{Z}$. Pour ce faire, utilisons ce qu'on appelle le théorème des coefficients universels qui dit que la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{n-1}(X), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X), \mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

est exacte (voir (Bredon, 1993) chapitre V section 7). Ici, $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{C})$ représente le n-ième groupe de cohomologie singulière à coefficient dans $\mathbb{C}$ (voir (Bredon, 1993) chapitre V section 5). On peut voir ce groupe dans le cadre de ce mémoire en considérant $\mathbb{C}$ comme étant le faisceau constant $\mathbb{C}$ sur X.

Rappelons que X représente toujours notre surface de Riemann compacte. Puisque $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre et que $\mathrm{H}_0(X) = \mathbb{Z}$, X étant connexe, on a $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_0(X), \mathbb{C}) = 0$. On peut voir la preuve de ces affirmations dans la section 6 du chapitre V de (Bredon, 1993). On a donc

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X), \mathbb{C}). \tag{A.1}$$

Théorème de décomposition de Hodge

Les travaux de Dolbeault consistaient à étudier un complexe construit à partir des formes de types (p,q). (On a vu dans ce mémoire ce qu'étaient les formes de types (0,1) et (1,0).) Ces complexes permettent de construire différents groupes de cohomologie notés $\mathrm{H}^{p,q}(X)$. Le théorème de décomposition de Hodge nous permet de dire que

$$\mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}) \cong \mathrm{H}^{0,1}(X) \oplus \overline{\mathrm{H}^{0,1}(X)}$$

où la barre $\overline{}$ signifie la conjugaison. On a donc

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}) \quad = \quad 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^{0,1}(X) \tag{A.2}$$

Pour le lecteur curieux d'en apprendre davantage, il est possible de consulter après un entraînement particulier le mythique chapitre 0 de (Griffiths et Harris, 1978). C'est à la section 7 qu'on trouvera ce résultat.

Théorème de Dolbeault

Pour connecter ce résultat à notre cohomologie de Čech à coefficients dans le faisceau des fonctions holomorphes, nous utilisons ce que (Griffiths et Harris, 1978) nomme le théorème de Dolbeault (voir chapitre 0, section 3) qui dit que

$$\mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}) \quad \cong \quad \mathrm{H}^{0,1}(X) \tag{A.3}$$

La finale

En mettant bout à bout les isomorphismes obtenus on a

$$\begin{aligned}
g = \quad & \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}) && \text{(notre définition)} \\
= \quad & \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^{0,1}(X) && \text{(par l'équation A.3)} \\
= \quad & \tfrac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}) && \text{(par l'équation A.2)} \\
= \quad & \tfrac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X),\mathbb{C}) && \text{(par l'équation A.1)} \\
= \quad & \tfrac{1}{2}(2\widehat{g}) \\
= \quad & \widehat{g}
\end{aligned}$$

donc on arrive à la conclusion que

genre = nombre de trous.

RÉFÉRENCES

Beaudet, Fernand. *Cohomologie des faisceaux.* Manuscrit, 82 p.

Bredon, Glen E. 1993. *Topology and geometry.* Coll. « Graduate texts in mathematics », no 139. New York: Springer-Verlag, 557 p. ISBN 0-387-97926-3. QA612.B74 1993.

Dieudonné, Jean-Alexandre. 1989. *A history of algebraic and differential topology: 1900-1960.* Boston (Mass): Birkauser, 648 p. ISBN 0-8176-3388-X. QA612D53

Forster, Otto. 1981. *Lectures on Riemann surfaces.* Coll. « Graduate texts in mathematics », no 81. New York: Springer-Verlag, 254 p. ISBN 0-387-90617-7. QA333.F6713

Griffiths, Phillip, et Joseph Harris. 1978. *Principles of algebraic geometry.* Coll. « Pure and applied mathematics ». New York: John Wiley & Sons, 813 p. ISBN 0-471-32792-1. QA564.G64

Lang, Serge. 1985. *Complex analysis.* Coll. « Graduate texts in mathematics », no 103. New York: Springer-Verlag, 367 p. ISBN 0-387-96085-6. QA331.L255 1985

Lang, Serge. 1993. *Real and functional analysis*, 3e éd. Coll. « Graduate texts in mathematics », no 142. New York: Springer-Verlag, 580 p. ISBN 0-387-94001-4. QA300.L274 1993

Massey, William S. 1967. *Algebraic topology: an introduction.* New York: Harcourt, Brace & World, 261 p.

Rudin, Walter. 1974. *Principles of mathematical analysis*, 2e éd. New York: McGraw-Hill, 270 p. QA300.R916

Silverman, Joseph H. 1986. *The arithmetic of elliptic curves.* Coll. « Graduate texts in mathematics », no 106. New York: Springer-Verlag, 400 p. ISBN 0-387-96203-4. QA567.S44

Warner, Frank Wilson. 1983. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Coll. « Graduate texts in mathematics », no 94. New York: Springer-Verlag, 272 p. ISBN 0-387-90894-3. QA614.3.W37 1983

INDEX