Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Rappresentazioni di gruppi di Lie compatti ed equazioni alle derivate parziali

Laureando: Roberto Albesiano
Relatore: Prof. Pieralberto Marchetti
Correlatore: Prof. Paolo Ciatti

Anno accademico 2015-2016

Indice

1 Introduzione

In questa tesi discuteremo la soluzione dell'equazione del calore in alcune varietà che hanno struttura di gruppo. Iniziamo delineando l'origine fisica di tale equazione.
Consideriamo un piccolo[1] blocco di materiale a temperatura T posto a contatto, tramite una membrana, con un corpo che assumiamo avere temperatura fissata T_0. Come noto dai corsi di Fisica Generale, T varia nel tempo nella seguente maniera:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -h(T - T_0),$$

dove h è una costante positiva proporzionale alla superficie della membrana, all'inverso del suo spessore e all'inverso del volume del blocco. Se ci interessa come varia la temperatura all'interno di un corpo esteso, possiamo scrivere un'equazione analoga considerando, anziché un blocchetto a contatto con un corpo, un cubetto di lato piccolo δ del corpo esteso: la variazione di temperatura di tale cubetto sarà dovuta allora agli scambi di calore che avvengono con i cubetti vicini tramite tutte e sei le sue facce. Per passare dal discreto al continuo conviene allora considerare, anziché le temperature costanti in ogni cubetto, un campo di temperatura $u(x, y, z; t)$ che le interpoli. Allora l'equazione che descrive come cambia la temperatura per un blocchetto piccolo di lato δ è

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\frac{\partial u(t,x,y,z)}{\partial t} =&(u(t,x+\delta,y,z) - u(t,x,y,z))+\\ &+ (u(t,x-\delta,y,z) - u(t,x,y,z))+\\ &+ (u(t,x,y+\delta,z) - u(t,x,y,z))+\\ &+ (u(t,x,y-\delta,z) - u(t,x,y,z))+\\ &+ (u(t,x,y,z+\delta) - u(t,x,y,z))+\\ &+ (u(t,x,y,z-\delta) - u(t,x,y,z)).\end{aligned}$$

Sviluppando tramite la serie di Taylor i termini a destra si nota che il primo ordine a dare contributi è il secondo e quindi vale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h\delta^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = k\Delta u, \tag{1}$$

dove k non dipende più, nel limite, da δ in quanto $h \sim \delta^2$. L'operatore differenziale $\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ è detto *operatore di Laplace* o *laplaciano*. L'equazione differenziale

[1] Qui "piccolo" vuol dire: di dimensioni trascurabili rispetto alla scala di distanze dovuta alla conduttività del corpo e alla scala di tempi scelta per osservare il processo.

alle derivate parziali così ottenuta prende il nome di *equazione del calore* e descrive, appunto, come la temperatura di un corpo varia in seguito al trasferimento interno di calore. Nel seguito, per comodità, porremo sempre $k = 1$.
Prima di procedere osserviamo che, se effettuiamo una rotazione di Wick (ovvero la sostituzione $t = i\tau$), l'equazione (1) diviene

$$-i\,\frac{\partial\psi(\tau,x,y,z)}{\partial\tau} = k\Delta\psi(\tau,x,y,z),$$

dove $\psi(\tau,x,y,z) = u(i\tau,x,y,z)$. Come si vede subito, questa equazione ha la stessa forma dell'equazione di Schrödinger di una particella libera:

$$-i\,\frac{\partial\psi(t,x,y,z)}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m}\Delta\psi(t,x,y,z).$$

Consideriamo ora il seguente problema. Sia $\mathbb{S}^1$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}^2$ (cioè la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine) e consideriamo l'equazione del calore su di essa. Si può immaginare il problema come un anello isolato dall'ambiente su cui il calore, posto in una configurazione iniziale fissata, viene lasciato diffondere. Possiamo scrivere questo problema pensando alle funzioni su $\mathbb{S}^1$ come funzioni di periodo 2π su $\mathbb{R}$; in particolare, come funzioni sull'intervallo $[0, 2\pi]$ che assumono uguali valori su 0 e 2π (ciò corrisponde a considerare il problema, equivalente, di una sbarretta con condizioni al contorno periodiche, cioè tale che la temperatura ai suoi estremi sia sempre uguale). Allora il problema è:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

con $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1)$, $x \in [0, 2\pi]$ e $t \geq 0$.
Un modo per risolvere questo problema è detto *metodo di Fourier* e consiste nel riscrivere il problema in termini della trasformata di Fourier di u, risolverlo trovando $\hat{u}$ e facendone quindi l'antitrasformata per trovare la u risolvente il problema originario. Poiché infatti le funzioni $\mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1)$ sono periodiche di periodo 2π, viene naturale pensare di scriverle come somma di seni e coseni:

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\cos(kx) + b_k(t)\sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t)\,\mathrm{e}^{ikx},$$

dove

$$u_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x.$$

Si ha allora

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-ikx} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 u_k(t)\mathrm{e}^{-ikx},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u_k(t)}{\partial t}\mathrm{e}^{-ikx}.$$

Dall'uguaglianza termine a termine delle due serie si trova allora la riscrittura in termini delle trasformate di Fourier del problema originario (le $u_k(t)$ infatti non sono altro che la trasformata di Fourier per la variabile x della $u(t,x)$)

$$-k^2\, u_k(t) = \frac{\partial u_k(t)}{\partial t}, \quad \forall k,$$

che ha come soluzione

$$u_k(t) = c_k\, \mathrm{e}^{-k^2 t}.$$

Si trova quindi che una soluzione dell'equazione differenziale è

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \mathrm{e}^{-k^2 t}\mathrm{e}^{ikx},$$

dove i coefficienti c_k restano poi determinati dalle condizioni al contorno che si impongono non appena si formula il problema di Cauchy, cioè si assegna un dato iniziale (essi sono infatti i coefficienti dello sviluppo di Fourier della funzione che appare nella condizione iniziale).
Vogliamo ora estendere quanto fatto a strutture più generali, i gruppi di Lie compatti. In particolare, come esempio, al termine di questo lavoro riusciremo a risolvere un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla sfera tridimensionale $\mathbb{S}^3$. A tal fine ripensiamo all'esempio descritto sopra: per quale ragione funziona il ragionamento esposto? Due fatti sono fondamentali in quanto detto:

1. possiamo scrivere tutte le funzioni L^2 di $\mathbb{S}^1$ in termini di seni e coseni: ciò può essere formalizzato nel fatto che le funzioni $\{\mathrm{e}^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ sono una base per lo spazio $L^2(\mathbb{S}^1)$ (formano difatti un sistema ortonormale completo),

2. tali funzioni di base sono inoltre autofunzioni dell'operatore Laplaciano.

Nel prossimo capitolo formalizzeremo tutto questo discorso, costruendo una teoria che vale in generale su qualsiasi gruppo di Lie compatto. Come esempio, nell'ultimo capitolo risolveremo il caso concreto dell'equazione del calore sulla sfera $\mathbb{S}^3$, con dato iniziale una delta di Dirac centrata in un suo punto (che non è una funzione, ma è approssimabile come vedremo con una successione di funzioni L^2 su $\mathbb{S}^3$).

2 Rappresentazione di gruppi di Lie compatti

Consideriamo un gruppo di Lie compatto G, ovvero un gruppo compatto dotato di una struttura differenziabile tale che le mappe

$$G \times G \to G, \ (x, y) \mapsto xy$$

$$G \to G, \ x \mapsto x^{-1}$$

siano differenziabili. Una misura di Radon[2] $\mu \geq 0$ su G è detta *invariante a sinistra* se, per ogni $g \in G$ e ogni $f \in \mathscr{C}_C(G)$, vale la seguente uguaglianza:

$$\int_G f(gx)\mu(\mathrm{d}x) = \int_G f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Ciò è equivalente a dire che, per ogni boreliano $E \subset G$ e per ogni $g \in G$, vale

$$\mu(gE) = \mu(E).$$

Si può dimostrare che esiste su G una misura invariante a sinistra e che essa è unica a meno di un fattore moltiplicativo [Far08, Th. 5.1.1]: tale misura è detta *misura di Haar sinistra.* Si trova inoltre [Far08, Prop. 5.1.3] che la misura di Haar, per un gruppo topologico compatto (quelli da noi considerati), è invariante anche a destra, ovvero:

$$\int_G f(xg)\mu(\mathrm{d}x) = \int_G f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Diamo ora la definizione di *rappresentazione* di un gruppo di Lie.

Definizione 1. *Sia G un gruppo di Lie, $\mathscr{H}$ uno spazio di Hilbert reale o complesso ($\mathscr{H} \neq 0$) e $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'algebra degli operatori limitati su $\mathscr{H}$. Una* ***rappresentazione di** G **su** $\mathscr{H}$* *è una mappa*

$$\pi : G \to \mathscr{L}(\mathscr{H}),$$

[2]Sia μ una misura sulla σ-algebra dei borelliani di uno spazio topologico separabile X. La misura μ è una *misura di Radon* se ha le seguenti proprietà [Fol99, pag. 212]

1. è finita su tutti i compatti
2. è *esternamente regolare* su ogni borelliano, cioè

$$\mu(B) = \inf_{\substack{U \supset B \\ U \text{ aperto}}} \mu(U), \qquad \forall B \text{ borelliano}$$

3. è *internamente regolare* su ogni aperto, cioè

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compatto}}} \mu(K), \qquad \forall A \text{ aperto di } X$$

$$g \mapsto \pi(g)$$

tale che

1. $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2), \pi(e) = I,$
2. *per ogni* $v \in \mathscr{H}$ *la mappa*
$$G \to V,$$
$$g \mapsto \pi(g)v$$
è continua.

Un sottospazio $W \subset \mathscr{H}$ è detto *invariante* se, per ogni $g \in G$, si ha

$$\pi(g)W = W.$$

La rappresentazione π è detta *irriducibile* se $\mathscr{H}$ non ha sottospazi invarianti chiusi non banali (cioè se gli unici sottospazi invarianti chiusi sono $\{0\}$ e $\mathscr{H}$).
Una rappresentazione π di G su $\mathscr{H}$ è detta *unitaria* se, per ogni $g \in G$, $\pi(g)$ è un operatore unitario, cioè è invertibile (ma ciò è automatico perché π è una rappresentazione) e $(\pi(g))^{-1} = (\pi(g))^*$. Ciò si può riscrivere nel seguente modo[3]:

$$\forall g \in G, \forall v \in \mathscr{H}, \quad \|\pi(g)v\| = \|v\|. \tag{2}$$

Quanto detto finora si applica a gruppi di Lie in generale. Vediamo ora due risultati validi per gruppi compatti, che sono poi quelli di nostro interesse.

Proposizione 1. *Sia π una rappresentazione di un gruppo compatto G su uno spazio di Hilbert di dimensione finita $\mathscr{H}$. Esiste su $\mathscr{H}$ un prodotto scalare Euclideo per il quale π è unitaria.*

Dimostrazione. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ un prodotto scalare Euclideo arbitrario su $\mathscr{H}$. Poniamo

$$\langle u, v \rangle = \int_G \langle \pi(h)u, \pi(h)v \rangle_0 \, \mu(\mathrm{d}h),$$

dove μ è la misura di Haar su G. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare Euclideo su $\mathscr{H}$ e inoltre, preso $g \in G$,

$$\langle \pi(g)u, \pi(g)v \rangle = \int_G \langle \pi(hg)u, \pi(hg)v \rangle_0 \, \mu(\mathrm{d}h) = \int_G \langle \pi(h)u, \pi(h)v \rangle_0 \, \mu(\mathrm{d}h) = \langle u, v \rangle$$

per l'invarianza destra della misura di Haar. Ciò verifica la condizione (2). □

[3] Ciò è vero in dimensione finita, ma in questo caso anche in dimensione infinita perché l'inversa dell'isometria $\pi(g)$ esiste, per definizione di rappresentazione, per ogni $g \in G$ ed è essa stessa isometria. Questo fa sì che la suriettività dell'isometria sia ancora verificata.

Vale allora il seguente corollario sulla decomposizione dello spazio $\mathscr{H}$ nella somma diretta di sottospazi irriducibili invarianti.

Corollario 1. *Sia π una rappresentazione di un gruppo compatto G su uno spazio di Hilbert finito $\mathscr{H}$.*

1. *Per ogni sottospazio invariante c'è un altro sottospazio invariante complementare.*
2. *Lo spazio vettoriale $\mathscr{H}$ può essere decomposto nella somma diretta di sottospazi invarianti irriducibili:*

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}_N.$$

Dimostrazione.

1. Per la Proposizione 1 esiste su $\mathscr{H}$ un prodotto scalare Euclideo per il quale la rappresentazione π è unitaria. Se π è unitaria e W è un sottospazio invariante, allora anche $W^\perp$ è sottospazio invariante. Sia infatti $v \in W^\perp$ e $u \in W$, allora per ogni $g \in G$ vale

$$\langle \pi(g)v, u\rangle = \langle v, (\pi(g))^* u\rangle = \langle v, (\pi(g))^{-1} u\rangle = \langle v, \pi(g^{-1})u\rangle = 0,$$

poiché W è sottospazio invariante e pertanto $\pi(g^{-1})u \in W$. Quindi $\pi(g)v \in W^\perp$ e dunque

$$\pi(g)W^\perp \subset W^\perp, \qquad \forall g \in G.$$

L'inclusione inversa si trova subito osservando che, per ogni $v \in W^\perp$, esiste $v' \in W^\perp$ tale che $v = \pi(g)v'$: tale è infatti $v' = \pi(g^{-1})v$ (che sta in $W^\perp$ per quanto appena visto).
Considerato allora un sottospazio invariante W, il sottospazio $W^\perp$ è un sottospazio invariante complementare a W.

2. Sia $\mathscr{H}_1$ un sottospazio invariante non nullo di dimensione minima. Per il punto precedente si ha la suddivisione di $\mathscr{H}$ in

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_1^\perp.$$

Se $\mathscr{H}_1^\perp \neq \{0\}$, sia $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}_1^\perp$ un sottospazio invariante non nullo di dimensione minima. Allora si suddivide $\mathscr{H}_1$ in

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 \oplus \mathscr{H}_2^\perp.$$

Si prosegue fino a che il sottospazio $\mathscr{H}_k^\perp$ non risulta essere zero: poiché la dimensione di V è finita, il processo è necessariamente finito.

$\square$

Enunciamo ora un importante risultato noto come *Lemma di Shur*. A tal fine serve innanzitutto la seguente definizione.

Definizione 2. *Siano* $(\pi_1, \mathscr{H}_1)$ *e* $(\pi_2, \mathscr{H}_2)$ *due rappresentazioni di* G. *Una mappa continua lineare* $A : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ ***intrallaccia*** *le due rappresentazioni se la relazione*

$$A\pi_1(g) = \pi_2(g)A$$

è soddisfatta per ogni $g \in G$. *Se esiste* A *come sopra,* π_1 *e* π_2 *sono dette* ***equivalenti***.

Teorema 1 (Lemma di Shur).

1. *Siano* $(\pi_1, \mathscr{H}_1)$ *e* $(\pi_2, \mathscr{H}_2)$ *due rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali di un gruppo di Lie* G. *Sia* $A : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *una mappa lineare che intrallaccia le rappresentazioni* π_1 *e* π_2. *Allora o* $A = 0$ *o* A *è un isomorfismo.*

2. *Sia* π *una rappresentazione irriducibile* $\mathbb{C}$*-lineare di un gruppo di Lie* G *su uno spazio di Hilbert complesso di dimensione finita* $\mathscr{H}$. *Sia* $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *una mappa* $\mathbb{C}$*-lineare che commuta con la rappresentazione, cioè:*

$$A\pi(g) = \pi(g)A$$

per ogni $g \in G$. *Allora esiste* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tale che*

$$A = \lambda I$$

(dove I *è la mappa identica).*

La dimostrazione di questo Teorema si può trovare in [Far08, Theorem 6.1.3].
Osserviamo che in questo modo si possono definire classi di equivalenza di rappresentazioni irriducibili: riflessività e simmetria sono ovvie, mentre per la transitività, date tre rappresentazioni π_1, π_2 e π_3, supponiamo che esistano A e B tali che, $\forall g \in G$,

$$\begin{cases} A\pi_1(g) = \pi_2(g)A \\ B\pi_2(g) = \pi_3(g)B \end{cases},$$

allora

$$\begin{cases} \pi_1(g) = A^{-1}\pi_2(g)A = (BA)^{-1}\pi_3(g)(BA) \\ \pi_2(g) = B^{-1}\pi_3(g)B \end{cases} \implies BA\pi_1(g) = \pi_3(g)BA$$

e quindi BA intrallaccia π_1 e π_3.
I seguenti risultati ci saranno utili nel seguito.

Lemma 1. *1. Ogni rappresentazione unitaria di un gruppo compatto contiene una sottorappresentazione finito-dimensionale.*

2. Ogni rappresentazione unitaria irriducibile di un gruppo compatto è finito-dimensionale.

Dimostrazione. Sia $(\pi, \mathscr{H})$ una rappresentazione unitaria di un gruppo compatto G, dotato di una misura di Haar normalizzata μ. Per $v \in \mathscr{H}$, si consideri l'operatore definito da

$$K_v w := \int_G \langle w, \pi(g)v \rangle \pi(g) v \mu(\mathrm{d}g).$$

Tale operatore è autoaggiunto, compatto e non nullo se $v \neq 0$ [Far08, Prop. 6.3.1]. Segue allora che ha un autovalore non nullo [Far08, Th. 6.2.4] e che, per il teorema spettrale [Far08, Th. 6.2.5], il corrispondente autospazio ha dimensione finita. Per l'invarianza della misura di Haar, l'operatore K_v è invariante per la composizione con la rappresentazione π, pertanto anche il sottospazio trovato sopra è invariante sotto la rappresentazione π.
Per il secondo punto basta osservare che, per definizione, una rappresentazione irriducibile è tale se le sue uniche sottorappresentazioni sono banali. Poiché quindi essa deve contenere, per il primo punto, una sottorappresentazione finito-dimensionale, allora tale sottorappresentazione è la rappresentazione stessa, che è dunque finito-dimensionale. □

Corollario 2 (**Relazioni di ortogonalità di Shur**). *Sia π una rappresentazione $\mathbb{C}$-lineare unitaria irriducibile di un gruppo compatto G su uno spazio di Hilbert complesso $\mathscr{H}$ di dimensione finita d_π e sia μ una misura di Haar normalizzata su G. Allora, per $u, v \in \mathscr{H}$,*

$$\int_G |\langle \pi(g)u, v \rangle|^2 \mu(\mathrm{d}g) = \frac{1}{d_\pi} \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Inoltre, per l'identità di polarizzazione, per $u, v, u', v' \in \mathscr{H}$,

$$\int_G \langle \pi(g)u, v \rangle \overline{\langle \pi(g)u', v' \rangle} \mu(\mathrm{d}g) = \frac{1}{d_\pi} \langle u, u' \rangle \langle v, v' \rangle.$$

Dimostrazione. Per $v \in \mathscr{H}$, l'operatore K_v commuta con la rappresentazione π. Per il Lemma di Shur allora, esiste $\lambda(v) \in \mathbb{C}$ tale che

$$K_v = \lambda(v) I,$$

perciò

$$\langle u, K_v u \rangle = \int_G |\langle \pi(g)u, v \rangle|^2 \mu(\mathrm{d}g) = \lambda(v) \|u\|^2.$$

Scambiando u e v e sfruttando l'invarianza della misura di Haar si ottiene

$$\lambda(u)\|v\|^2 = \lambda(v)\|u\|^2$$

e quindi deve essere $\lambda(u) = \lambda_0\|u\|^2$, con λ_0 costante.
Sia $\{e_1, \ldots, e_{d_\pi}\}$ una base ortonormale di $\mathscr{H}$. Poiché la rappresentazione è unitaria, si ha

$$\sum_{i=1}^{d_\pi} |\langle \pi(g)u|e_i\rangle|^2 = \|\pi(g)u\|^2 = \|u\|^2.$$

Allo stesso tempo, integrando su G (ricordiamo che la misura di Haar μ è normalizzata), otteniamo

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{d_\pi} \int_G |\langle \pi(g)u, e_i\rangle|^2 \mu(\mathrm{d}g) = d_\pi \lambda_0 \|u\|^2$$

e quindi deve essere

$$\lambda_0 = \frac{1}{d_\pi}.$$

Concludendo, si ha dunque

$$\int_G |\langle \pi(g)u, v\rangle|^2 \mu(\mathrm{d}g) = \frac{1}{d_\pi}\|u\|^2\|v\|^2.$$

□

Siamo ora quindi pronti per enunciare i due risultati fondamentali per i nostri scopi. Il primo prende il nome di *Teorema di Peter-Weyl* e fornisce una decomposizione dello spazio $L^2(G)$ in sottospazi generati (in un senso che chiariremo tra poco) dalle rappresentazioni. Il secondo invece è una generalizzazione del *Teorema di Plancherel* nel linguaggio delle rappresentazioni.
Innanzitutto, sia π una rappresentazione di un gruppo G. Denotiamo con $\mathscr{M}_\pi$ il sottospazio di $L^2(G)$ generato dagli elementi di matrice della rappresentazione π, ovvero dalle funzioni della forma:

$$g \mapsto \langle \pi(g)u, v\rangle, \qquad u, v \in \mathscr{H}.$$

Lemma 2. *Siano $(\pi, \mathscr{H})$ e $(\pi', \mathscr{H}')$ due rappresentazioni unitarie irriducibili di un gruppo compatto G che non siano equivalenti. Allora $\mathscr{M}_\pi$ e $\mathscr{M}_{\pi'}$ sono due sottospazi ortogonali di $L^2(G)$, cioè:*

$$\int_G \langle \pi(g)u, v\rangle \overline{\langle \pi'(g)u', v'\rangle} \mu(\mathrm{d}g) = 0 \qquad (u, v \in \mathscr{H},\ u', v' \in \mathscr{H}')$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che le rappresentazioni hanno dimensione finita, in quanto rappresentazioni irriducibili di un gruppo compatto. Sia quindi A una mappa lineare da $\mathscr{H}$ in $\mathscr{H}'$ e si ponga

$$\tilde{A} := \int_G \pi'(h^{-1})A\pi(h)\mu(\mathrm{d}h).$$

Allora $\tilde{A}$ è una mappa lineare da $\mathscr{H}$ in $\mathscr{H}'$ che intrallaccia le rappresentazioni π e π'. Infatti

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \circ \pi(g) &= \int_G \pi'(h^{-1})A\pi(h)\pi(g)\mu(\mathrm{d}h) \\
&= \int_G \pi'(h^{-1})A\pi(hg)\mu(\mathrm{d}h) \qquad\qquad {\scriptstyle (k=hg)} \\
&= \int_G \pi'(gk^{-1})A\pi(k)\mu(\mathrm{d}kg^{-1}) \\
&= \int_G \pi'(g)\pi'(k^{-1})A\pi(k)\mu(\mathrm{d}k) = \pi'(g) \circ \tilde{A},
\end{aligned}$$

dove, nel passaggio dalla penultima all'ultima riga, si è sfruttata l'invarianza destra della misura di Haar.
Per il Lemma di Shur, allora, o $\tilde{A}$ è un isomorfismo, o $\tilde{A} = 0$. Possiamo escludere però il primo caso poiché altrimenti $(\pi, \mathscr{H})$ e $(\pi', \mathscr{H}')$ sarebbero equivalenti, contraddicendo le ipotesi. Perciò $\tilde{A} = 0$ e dunque

$$\langle \tilde{A}u, u' \rangle = \int_G \langle A\pi(g)u, \pi'(g)u' \rangle \mu(\mathrm{d}g) = 0.$$

Se ora prendiamo A come l'operatore definito da

$$Au = \langle u, v \rangle v' \qquad (v \in \mathscr{H}, v' \in \mathscr{H}'),$$

allora

$$A\pi(g)u = \langle \pi(g)u, v \rangle v'$$

e quindi

$$\int_G \langle \pi(g)u, v \rangle \overline{\langle \pi(g)u', v' \rangle} \mu(\mathrm{d}g) = 0.$$

□

Segue da ciò che due rappresentazioni irriducibili π_1 e π_2 di un gruppo compatto G sono equivalenti se e solo se gli spazi $\mathscr{M}_{\pi_1}$ e $\mathscr{M}_{\pi_2}$ coincidono.

Teorema 2 (**Teorema di Peter-Weyl**). *Sia $\hat{G}$ l'insieme delle classi di equivalenza delle rappresentazioni unitarie irriducibili di un gruppo compatto G. Per ogni $\lambda \in \hat{G}$, sia inoltre $\mathscr{M}_\lambda$ lo spazio generato dai coefficienti di una rappresentazione nella classe λ. Allora:*

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{\lambda \in \hat{G}}} \mathscr{M}_\lambda,$$

ovvero, lo spazio delle funzioni $L^2(G)$ è la chiusura della somma diretta degli spazi $\mathscr{M}_\lambda$ generati dalle rappresentazioni[4].

Dimostrazione. Per il Lemma 2, i sottospazi $\mathscr{M}_\lambda$ di $L^2(G)$ sono a due a due ortogonali. Poniamo allora

$$\mathscr{H} = \widehat{\bigoplus_{\lambda \in \hat{G}}} \mathscr{M}_\lambda.$$

Il nostro obbiettivo è dimostrare che $\mathscr{H}^\perp = \{0\}$. Supponiamo dunque che valga il contrario. Lo spazio $\mathscr{H}$ è invariante sotto la *rappresentazione regolare destra* di G su $L^2(G)$

$$(R(g)f)(x) = f(xg)$$

[Far08, pag. 107] e quindi, per il Corollario 1, anche $\mathscr{H}^\perp$ è invariante sotto tale rappresentazione. Per l'ipotesi per assurdo e per il Lemma 1, inoltre, $\mathscr{H}^\perp$ contiene un sottospazio chiuso $\mathscr{Y} \neq \{0\}$ invariante sotto R ed irriducibile. La restrizione di R a $\mathscr{Y}$ è sempre una rappresentazione di G e dunque appartiene ad una delle classi λ. Sia $f \in \mathscr{Y}$, $f \neq 0$, e sia

$$F(g) := \int_G f(xg)\overline{f(x)}\mu(\mathrm{d}x) = \langle R(g)f, f\rangle.$$

Per come è costruita, $F \in \mathscr{M}_\lambda$.
Dimostriamo ora che $F \perp \mathscr{M}_\lambda$, ottenendo quindi la tesi. Sia (π, V) una rappresen-

[4] Ricordiamo che

$$\bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathscr{M}_\lambda$$

è l'insieme costituito dalle combinazioni lineari finite del tipo

$$\sum_{\substack{\lambda \in A \subset \hat{G} \\ A \text{ finito}}} \sum_{u,v \in \mathscr{H}_\lambda} c_{u,v} \langle \pi_\lambda(g)u, v\rangle.$$

tazione della classe λ e siano $u, v \in V$. Allora

$$\begin{aligned}\int_G F(g)\overline{\langle \pi(g)u, v\rangle}\mu(\mathrm{d}g) &= \int_G\int_G f(xg)\overline{f(x)\langle \pi(g)u, v\rangle}\mu(\mathrm{d}g)\mu(\mathrm{d}x) \qquad {\scriptstyle (xg=k)}\\ &= \int_G \overline{f(x)}\left(\int_G f(k)\overline{\langle \pi(kx^{-1})u, v\rangle}\mu(\mathrm{d}kx^{-1})\right)\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_G \overline{f(x)}\left(\int_G f(k)\overline{\langle \pi(k)u, \pi(x)v\rangle}\mu(\mathrm{d}k)\right)\mu(\mathrm{d}x) = 0,\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è sfruttata l'invarianza destra della misura di Haar, mentre nell'ultimo il fatto che, per ipotesi, $f \perp \langle \pi(g')u, \pi(x)v\rangle \in \mathscr{M}_\lambda$.
Allora $F = 0$ e, poiché

$$F(e) = \int_G |f(x)|^2\mu(\mathrm{d}x),$$

segue che $f = 0$. Ciò contraddice l'ipotesi che avevamo fatto per assurdo. $\square$

Conseguenza di questo teorema e delle relazioni di ortogonalità di Shur è il *Teorema di Plancherel*, che enunceremo a breve, dopo aver dato alcune definizioni.
Sia $\mathscr{H}$ uno spazio di Hilbert finito-dimensionale e sia $A \in \mathscr{L}(H)$. La *norma di Hilbert-Schmidt* di A è definita come

$$\|A\|_{HS}^2 := \mathrm{tr}(AA^*).$$

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortogonale di $\mathscr{H}$ e se (a_{ij}) è la matrice di A rispetto a questa base, allora

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

Per ogni $\lambda \in \hat{G}$, scegliamo un rappresentante $(\pi_\lambda, \mathscr{H}_\lambda)$. Sia d_λ la dimensione di $\mathscr{H}_\lambda$. Se f è una funzione integrabile su G, il suo *coefficiente di Fourier* $\hat{f}(\lambda)$ è l'operatore, che agisce sullo spazio $\mathscr{H}_\lambda$, definito da

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g)\pi_\lambda(g^{-1})\mu(\mathrm{d}g).$$

Teorema 3 (**Teorema di Plancherel**). *Sia $f \in L^2(G)$. Allora f è uguale alla somma della sua serie di Fourier:*

$$f(g) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda\,\mathrm{tr}(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(g)).$$

Inoltre, nel senso L^2,

$$\int_G |f(g)|^2\mu(\mathrm{d}g) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda\|\hat{f}(\lambda)\|_{HS}^2$$

e, se $f_1, f_2 \in L^2(G)$,

$$\int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}\mu(\mathrm{d}g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} d_\lambda \operatorname{tr}(\hat{f}_1(\lambda)\hat{f}_2(\lambda)^*).$$

Infine, la mappa $f \mapsto \hat{f}$ *è un isomorfismo unitario da* $L^2(G)$ *nello spazio delle successioni di operatori* $A = (A_\lambda)$ $(A_\lambda \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\lambda))$, *per le quali*

$$\|A\|^2 = \sum_{\lambda \in \hat{G}} d_\lambda \|A_\lambda\|^2_{HS} < \infty,$$

dotato di tale norma.

A titolo di esempio, ritroviamo il teorema "classico" di Plancherel. Se il gruppo compatto G è commutativo, allora, per il lemma di Shur, una rappresentazione $\mathbb{C}$-lineare irriducibile è monodimensionale (infatti la rappresentazione stessa è una mappa $\mathbb{C}$-lineare che commuta con la rappresentazione) e $\hat{G}$ è l'insieme dei caratteri continui. Intendiamo con *carattere continuo* una funzione continua

$$\chi : G \to \mathbb{C}^*,$$

che soddisfi, per ogni $x, y \in G$, l'uguaglianza

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y).$$

Poiché G è compatto, l'insieme $\chi(G)$ è un sottogruppo compatto di $\mathbb{C}^*$ e pertanto è l'insieme dei numeri complessi di modulo uno, perciò:

$$\chi : G \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

L'insieme $\hat{G}$ è un gruppo commutativo per il prodotto di caratteri, chiamato *gruppo duale* di G. Per il Teorema di Peter-Weyl, i caratteri continui formano una base di Hilbert di $L^2(G)$. Allora il coefficiente di Fourier di $f \in L^2(G)$ è

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\mu(\mathrm{d}x),$$

la serie di Fourier si scrive

$$f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)$$

e la formula di Plancherel è

$$\int_G |f(x)|^2 \mu(\mathrm{d}x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.$$

Se per esempio prendiamo $G = SO(2) \simeq U(1) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, allora si ottengono le solite formule della trasformata di Fourier. Infatti, un carattere ha la forma

$$\chi(\theta) = e^{im\theta}, \ m \in \mathbb{Z}$$

e $\hat{G} \simeq \mathbb{Z}$ [Far08, pag. 111]. Se f è una funzione integrabile su $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, i coefficienti di Fourier di f sono allora

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \mathrm{e}^{-im\theta} \, \mathrm{d}\theta,$$

la serie di Fourier è

$$f(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \mathrm{e}^{im\theta}$$

e la formula di Plancherel è, se $f \in L^2(G)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \, \mathrm{d}\theta = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^2.$$

2.1 Rappresentazioni irriducibili di SU(2) e operatore di Laplace

Vediamo ora un'applicazione della teoria esposta, che ci servirà anche nel prossimo capitolo. Consideriamo il *gruppo unitario speciale* di grado 2: $SU(2)$. Tale gruppo è formato dalle matrici complesse 2×2 unitarie e con determinante 1, cioè:

$$\begin{aligned} SU(2) &= \big\{ A \in M(n, \mathbb{C} : A^* A = A A^* = I, \det A = 1 \big\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

(dove si è indicato con A^* la matrice coniugata trasposta di A e con I la matrice identità 2×2). Osserviamo che $SU(2)$ è sottogruppo chiuso del *gruppo lineare generale* di ordine 2, $GL(2)$, in quanto tutte le matrici in $SU(2)$ sono invertibili (l'inversa è difatti la coniugata trasposta), pertanto $SU(2)$ è un gruppo di Lie di matrici. Si dimostra inoltre che $SU(2)$ è diffeomorfo alla sfera in quattro dimensioni $\mathbb{S}^3$ ed è pertanto compatto: $SU(2)$ è difatti diffeomorfo, per come definito, all'insieme formato dagli elementi $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tali che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, che è a sua volta diffeomorfo all'insieme degli $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tali che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, in quanto $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$.

Sia $\mathscr{P}_m$ lo spazio dei polinomi di grado m in due variabili a coefficienti complessi. Osserviamo che $\dim \mathscr{P}_m = m+1$. Definiamo la rappresentazione π_m di $SU(2)$ su $\mathscr{P}_m$ nel seguente modo:

$$(\pi_m(g)f)(u,v) = f(au+cv, bu+dv)$$

se

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Vale il seguente fatto [Far08, Th. 7.5.3], che non dimostriamo perché richiederebbe troppi prerequisiti.

Proposizione 2. *Sia π una rappresentazione irriducibile di $SU(2)$ su uno spazio vettoriale complesso finito-dimensionale V. Allora π è equivalente ad una delle rappresentazioni π_m.*

Per procedere, dobbiamo ora introdurre il concetto di *algebra di Lie* di un gruppo di Lie lineare.

Definizione 3. *Sia G un gruppo di Lie lineare, cioè un sottogruppo chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$. L'**algebra di Lie** di G è l'insieme*

$$\mathfrak{g} := Lie(G) := \{X \in M(n,\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

In particolare, vale il seguente teorema [Far08, Th. 3.2.1].

Teorema 4. *1. L'insieme $\mathfrak{g}$ è un sottospazio vettoriale di $M(n,\mathbb{R})$.*

2. Se $X, Y \in \mathfrak{g}$, allora $[X,Y] := XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Osserviamo che allora $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie in senso astratto, cioè uno spazio vettoriale dotato di una mappa bilineare

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (X,Y) \mapsto [X,Y]$$

che soddisfa le due condizioni seguenti:

1. $[X,Y] = -[Y,X]$,
2. $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0.$

La seconda uguaglianza, nello specifico, prende il nome di *identità di Jacobi.* L'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ di $SU(2)$ si trova facilmente [Hal15, Prop. 3.24] essere l'insieme delle matrici complesse 2×2 antihermitiane (cioè le matrici A tali che $A^* = -A$) a traccia nulla:

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & -\overline{z} \\ z & -ia \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}$$

Definiamo ora che cosa intendiamo con *funzione di classe* $\mathscr{C}^k$ su un gruppo di Lie lineare G.

Definizione 4. *Sia $U \subset G$ un insieme aperto. Diremo che una funzione f a valori complessi definita su U è di classe $\mathscr{C}^1$ se*

1. *per ogni $g \in U$ e $X \in \mathfrak{g} = Lie(G)$, la funzione*

$$t \mapsto f(g \exp(tX))$$

è differenziabile in $t = 0$: si pone allora

$$\big(\rho(X)f\big)(g) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g \exp(tX))|_{t=0},$$

2. *la mappa*

$$\mathfrak{g} \times U \to \mathbb{C}, \qquad (X, g) \mapsto \big(\rho(X)f\big)(g)$$

è continua.

Si definisce poi lo spazio delle funzioni $\mathscr{C}^k$ su U ricorsivamente: una funzione f è $\mathscr{C}^k$ su U se $f \in \mathscr{C}^1$ e se la funzione $\rho(X)f$ è $\mathscr{C}^{k-1}$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Una funzione f è $\mathscr{C}^\infty$ se è $\mathscr{C}^k$ per ogni k.

Osserviamo che, posto

$$(L(g)f)(x) := f(g^{-1}x), \qquad (R(g)f)(x) := f(xg),$$

si ha

1. se $f \in \mathscr{C}^1(U)$, allora $L(g)f \in \mathscr{C}^1(gU)$ e

$$\rho(X)L(g)f = L(g)\rho(X)f,$$

2. se $f \in \mathscr{C}^1(U)$, allora $R(g)f \in \mathscr{C}^1(Ug^{-1})$ e

$$\rho(X)R(g)f = R(g)\rho(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)f.$$

Infatti

$$\begin{aligned}(R(g)f)(x\exp(tX)) &= f(x\exp(tX)g) = f(xg\exp(tg^{-1}Xg)) \\ &= f(xg\exp(t\,\mathrm{Ad}(g^{-1})X)).\end{aligned}$$

La mappa
$$\mathrm{Ad}(g) : X \mapsto Ad(g)X = gXg^{-1}$$
è un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ [Far08, pag. 40] ed inoltre
$$\mathrm{Ad}(g_1 g_2) = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}(g_2).$$
Osserviamo che allora tale mappa è una rappresentazione del gruppo di Lie G sullo spazio vettoriale degli automorfismi della sua algebra di Lie, $Aut(\mathfrak{g})$, e viene perciò detta *rappresentazione aggiunta*.

Sia dunque G un gruppo di Lie lineare e f una funzione $\mathscr{C}^2$ su G. Sia inoltre $\mathfrak{g} = Lie(G)$ dotata di un prodotto scalare Euclideo e di una base ortonormale $\{X_1, \dots, X_n\}$. Poniamo
$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(x \exp(tX_i))|_{t=0}, \qquad x \in G$$
cioè
$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)^2.$$
L'operatore differenziale Δ definito in questo modo non dipende dalla scelta della base ortonormale [Far08, pag. 162] ed è invariante a sinistra:
$$\Delta(f \circ L(g)) = (\Delta f) \circ L(g).$$
Se inoltre Δ è invariante anche a destra, cioè
$$\Delta(f \circ R(g)) = (\Delta f) \circ R(g),$$
Δ è chiamato *operatore di Laplace*. Nel caso in cui G sia compatto ciò risulta essere verificato [Far08, pag. 162].
Sia quindi G compatto e sia μ la misura di Haar normalizzata su G. Per $f, \phi \in \mathscr{C}^1(G)$,
$$(\rho(X)f, \phi) = -(f, \rho(X)\phi)$$
rispetto al prodotto scalare di $L^2(G)$. Infatti
$$\begin{aligned}
\int_G \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(g\exp(tX))\overline{\phi(g)}\mu(\mathrm{d}g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \int_G f(g\exp(tX))\overline{\phi(g)}\mu(\mathrm{d}g) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \int_G f(g)\overline{\phi(g\exp(-tX))}\mu(\mathrm{d}g) \\
&= \int_G f(g)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \overline{\phi(g\exp(-tX))}\mu(\mathrm{d}g).
\end{aligned}$$

Allora l'operatore di Laplace è simmetrico: se $f, \phi \in \mathscr{C}^2(G)$,

$$(\Delta f, \phi) = (f, \Delta\phi).$$

Inoltre $-\Delta$ è positivo poiché

$$-(\Delta f, f) = \int_G \sum_{i=1}^n |\rho(X_i) f(g)|^2 \mu(\mathrm{d}g).$$

Sia quindi $G = SU(2)$: tale gruppo è compatto in quanto isomorfo alla sfera $\mathbb{S}^3$ di $\mathbb{R}^4$. Sia inoltre π una rappresentazione irriducibile di G su uno spazio vettoriale complesso V. Enunciamo, senza dimostrare in quanto richiederebbe di nuovo l'introduzione di troppi prerequisiti, il seguente risultato sul laplaciano di funzioni in $\mathscr{M}_\pi$.

Proposizione 3. *Una funzione $f \in \mathscr{M}_\pi$ è un'autofunzione dell'operatore di Laplace Δ, cioè esiste un numero κ_π tale che*

$$\Delta f = -\kappa_\pi f.$$

In particolare, per $G = SU(2)$ vale

$$\kappa_m := \kappa_{\pi_m} = m(m+2),$$

dove π_m è un rappresentante della classe di equivalenza m, come descritto in precedenza.

Le dimostrazioni di questi due fatti sono contenute, rispettivamente, in [Far08, Prop. 8.2.1] e [Far08, Prop. 8.3.2].
Ciò che a noi interesserà, in particolare, nel prossimo capitolo è che, per la proposizione precedente, una funzione $f \in \mathscr{M}_m$ sottospazio di $L^2(SU(2))$ generato dai coefficienti della rappresentazione π_m, è autofunzione dell'operatore di Laplace:

$$\Delta f = -m(m+2)f.$$

Perciò la decomposizione

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathscr{M}_m}$$

può essere vista come la decomposizione di $L^2(G)$ nella somma diretta degli autospazi dell'operatore di Laplace.

3 Equazione del calore su $SU(2)$

L'obbiettivo del seguente capitolo è quello di risolvere l'equazione del calore su $G = SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$, con dato iniziale una delta di Dirac centrata in un punto di G. A tal fine, il programma che ci prefiggiamo di seguire è il seguente:

1. scrivere la misura di Haar di $SU(2)$, sfruttando le coordinate polari di $\mathbb{R}^4$ ristrette alla sfera di raggio unitario,
2. trovare una famiglia di funzioni su $SU(2)$ che approssimano, nel senso delle distribuzioni, la delta di Dirac,
3. risolvere l'equazione del calore usando il metodo di Fourier (in particolare, si dovrà scrivere la trasformata di Fourier delle funzioni del punto precedente).

3.1 Misura di Haar di $SU(2)$

Iniziamo dunque scrivendo la misura su $SU(2)$. Sia $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ una base per $\mathbb{R}^4$, possiamo fare il seguente passaggio a coordinate sferiche:

$$\Phi : \begin{cases} x_1 = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\eta) \\ x_2 = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\eta) \\ x_3 = \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ x_4 = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

con $\rho \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, \pi]$ e $\eta \in [0, 2\pi]$. Lo Jacobiano di Φ è allora

$$\begin{aligned}
J_\Phi &= \det \begin{pmatrix} \sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\eta) & \rho\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\eta) & \rho\sin(\theta)\cos(\phi)\sin(\eta) & \rho\sin(\theta)\sin(\phi)\cos(\eta) \\ \sin(\theta)\sin(\phi)\cos(\eta) & \rho\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\eta) & \rho\sin(\theta)\cos(\phi)\cos(\eta) & -\rho\sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\eta) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \rho\cos(\theta)\cos(\phi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\rho\sin(\theta)\sin(\phi)\cos(\eta)\, \det \begin{pmatrix} \sin(\theta)\sin(\phi)\cos(\eta) & \rho\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\eta) & \rho\sin(\theta)\cos(\phi)\cos(\eta) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \rho\cos(\theta)\cos(\phi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \rho\sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\eta)\, \det \begin{pmatrix} \sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\eta) & \rho\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\eta) & \rho\sin(\theta)\cos(\phi)\sin(\eta) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \rho\cos(\theta)\cos(\phi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \rho^3 \sin^2(\theta)\sin(\phi)\cos^2(\phi) + \rho^3\sin^2(\theta)\sin^3(\phi) \\
&= \rho^3\sin^2(\theta)\sin(\phi) \geq 0.
\end{aligned}$$

Poiché a noi interessa la misura sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^4$, da qui in avanti ρ sarà sempre identicamente 1 (e quindi le funzioni che scriveremo non dipenderanno da ρ). Abbiamo in questo modo scritto una misura su $SU(2)$,

$$\eta(\mathrm{d}g) = \sin^2(\theta)\sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\eta,$$

e possiamo allora dedicarci al secondo punto.

3.2 Approssimazione della delta di Dirac

Consideriamo la funzione caratteristica della "calotta superiore" di $\mathbb{S}^3$, cioè la funzione

$$\psi(\theta,\phi,\eta) := \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]}(\theta).$$

Useremo tale funzione come prototipo per costruire la successione di funzioni che approssimano la delta di Dirac centrata nel punto di coordinate

$$(\theta_0,\phi_0,\eta_0) = (0,0,0).$$

Calcoliamo come prima cosa l'integrale su $SU(2)$ di questa funzione:

$$\begin{aligned}
A &:= \int_{SU(2)} \psi(g)\,\mu(\mathrm{d}g) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\eta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \sin(\phi) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin^2(\theta)\chi_{[0,\frac{\pi}{2}]}(\theta) \\
&= 2\pi \left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin^2(\theta) \\
&= 2\pi\, 2\, \frac{1}{2} \left[\theta - \cos(\theta)\sin(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2.
\end{aligned}$$

Sia quindi $s \in]0,1]$ e consideriamo una "contrazione" di ψ nella variabile θ che ne preservi l'integrale, cioè consideriamo la funzione

$$\psi_s(\theta,\phi,\eta) := \frac{1}{\sigma(s)}\,\psi\left(\frac{\theta}{s},\phi,\eta\right) = \frac{1}{\sigma(s)}\,\chi_{[0,\frac{\pi}{2}]}\left(\frac{\theta}{s}\right) = \frac{1}{\sigma(s)}\,\chi_{[0,s\frac{\pi}{2}]}(\theta),$$

dove $\sigma(s)$ è un parametro dipendente da s tale che

$$\begin{aligned}
\pi^2 = A &\overset{!}{=} \int_{SU(2)} \psi_s(g)\, \mu(\mathrm{d}g) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\eta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \sin(\phi) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin^2(\theta) \frac{1}{\sigma(s)} \chi_{[0, s\frac{\pi}{2}]}(\theta) \\
&= 4\pi \frac{1}{\sigma(s)} \int_0^{s\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \sin^2(\theta) = \frac{2\pi}{\sigma(s)} \left[\theta - \cos(\theta)\sin(\theta)\right]_0^{s\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\pi}{\sigma(s)} \left(s\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sigma(s)} (\pi s - \sin(\pi s))
\end{aligned}$$

e dunque risulta

$$\sigma(s) = s - \frac{\sin(\pi s)}{\pi}. \tag{3}$$

Osserviamo che $\sigma(1) = 1$ e che $\lim_{s \to 0^+} \sigma(s) = 0$. Scriviamo inoltre, per comodità successiva, i primi termini dello sviluppo in serie di Taylor della (3) per $s \sim 0^+$:

$$\sigma(s) \underset{s \sim 0^+}{=} s - \frac{1}{\pi} \left(\pi s - \frac{\pi^3 s^3}{6} + O(s^5) \right) = \frac{1}{6} \pi^2 s^3 + O(s^5). \tag{4}$$

Vogliamo ora verificare che nel limite $s \to 0^+$ la ψ_s sia una delta di Dirac centrata in $(0,0,0)$. A tal fine, sia $f \in \mathscr{C}^\infty(SU(2))$ una funzione di prova:

$$\begin{aligned}
\langle f, \psi_s \rangle_{L^2(SU(2))} &= \int_{SU(2)} f(g) \psi_s(g)\, \mu(\mathrm{d}g) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\eta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \sin(\phi) \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) \frac{1}{\sigma(s)} f(\theta, \phi, \eta)\, \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]} \left(\frac{\theta}{s} \right) \\
&= \frac{4\pi}{\sigma(s)} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin^2(\theta) \bar{f}(\theta)\, \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]} \left(\frac{\theta}{s} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

dove si è indicata con

$$\bar{f}(\theta) := \frac{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\eta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \sin(\phi) f(\theta, \phi, \eta)}{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\eta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \sin(\phi)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\eta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \sin(\phi) f(\theta, \phi, \eta)$$

la media di $f(\theta,\phi,\eta)$ nelle variabili ϕ e η.
Consideriamo allora il cambio di variabili $\vartheta = \frac{\theta}{s}$ e proseguiamo lo sviluppo (5):

$$\begin{aligned}\int_{SU(2)} f(g)\psi_s(g)\,\mu(\mathrm{d}g) &= \frac{4\pi}{\sigma(s)}\int\limits_0^{\pi/s}\mathrm{d}\vartheta s\sin^2(s\vartheta)\bar{f}(s\vartheta)\,\chi_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}(\vartheta)\\ &= \frac{4\pi}{\sigma(s)}\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta s\sin^2(s\vartheta)\bar{f}(s\vartheta).\end{aligned}$$

Nel passaggio dalla prima alla seconda riga si è sfruttato il fatto che $0 < s \leq 1$ e quindi $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0,\frac{\pi}{s}\right]$.
Proseguiamo quindi nello sviluppo (5) sfruttando lo sviluppo (4) e il primo ordine dello sviluppo di $\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}\int_{SU(2)} f(g)\psi_s(g)\,\mu(\mathrm{d}g) &= 4\pi\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta\,\frac{s(s\vartheta+O(s^3))^2}{\frac{1}{6}\pi^2 s^3+O(s^5)}\bar{f}(s\vartheta)\\ &\xrightarrow{s\to 0^+} 4\pi\bar{f}(0)\frac{1}{\frac{1}{6}\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta\,\vartheta^2\\ &= \pi^2\bar{f}(0) = \pi^2 f(0,0,0) = \langle f,\pi^2\delta_{(0,0,0)}\rangle_{L^2(SU(2))}.\end{aligned}$$

Nel penultimo passaggio si è sfruttata la continuità della funzione f. Ciò verifica quindi che, nel senso delle distribuzioni, vale

$$\lim_{s\to 0^+}\psi_s = \pi^2\delta_{(0,0,0)} = A\delta_{(0,0,0)}.$$

3.3 Risoluzione dell'equazione del calore con il metodo di Fourier

Come visto nel Paragrafo 2.1, lo spazio delle funzioni $L^2(SU(2))$ può essere decomposto come somma diretta degli autospazi relativi all'operatore di Laplace.
Sfruttando la simmetria del dato iniziale, si può semplificare il conto osservando che le uniche armoniche necessarie per descrivere una funzione a simmetria rotazionale attorno all'asse passante per $(0,0,0)$ (cioè dipendenti solo da θ) sono le cosiddette *funzioni zonali* [SW71, Cap. 4]:

$$Y_{k,0}(\theta) = C(k)P_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\cos(\theta)),$$

dove

$$C(k) = (k+1)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(k+1)!}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}$$

è la costante di normalizzazione in $L^2(SU(2))$ e $P_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ è un *polinomio di Jacobi*. Nello specifico, per $x \in \mathbb{R}$, tale polinomio vale

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+\alpha}{j}\binom{k+\beta}{k-j}(x-1)^{k-j}(x+1)^j$$

([Sze39, Cap. 4]), con

$$\binom{x}{n} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(x-n+1)}, \qquad n \geq 0.$$

Si è indicata con Γ la funzione Gamma di Eulero.
Le funzioni zonali risultano essere una base per le funzioni in $L^2(SU(2))$ simmetriche rispetto alle rotazioni attorno all'asse di $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ passante per $(0,0,0)$. Una qualsiasi di queste funzioni può allora essere scritta come

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k,0}\, Y_{k,0}(\theta),$$

dove le $Y_{k,0}$ sono le funzioni zonali scritte prima e i coefficienti sono

$$c_{k,0} = \langle Y_{k,0}, f\rangle_{L^2(SU(2))}.$$

Nel caso particolare da noi considerato, le funzioni di cui ci interessa scrivere lo sviluppo di Fourier sono le ψ_s descritte nel precedente paragrafo. I coefficienti di Fourier risultano perciò essere:

$$\begin{aligned} c_{k,0}^{(s)} &= \langle Y_{k,0}, \psi_s\rangle_{L^2(SU(2))} \\ &= \frac{1}{\sigma(s)}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\eta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \sin(\phi) \int_0^{(s\pi)/2} \mathrm{d}\theta \sin^2(\theta) C(k) P_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\cos(\theta)) \\ &= \frac{4\pi C(k)}{\sigma(s)} \int_0^{(s\pi)/2} \mathrm{d}\theta \sin^2(\theta) P_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\cos(\theta)). \end{aligned} \tag{6}$$

Nel linguaggio delle distribuzioni, il problema di Cauchy è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) \\ u(0,x) = \delta_0(x) \end{cases}, \tag{7}$$

dove si intende $x \in SU(2)$ e $\delta_0 = \delta_{(0,0,0)}$ scritta prima. Ciò vuol dire che, $\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty(SU(2) \times \mathbb{R})$, deve valere

$$0 = \langle \partial_t u - \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, -\partial_t \varphi \rangle + \langle u, \Delta \varphi \rangle.$$

Per risolvere il Problema (7) procediamo nel seguente modo: risolviamo il problema con dato iniziale una delle ψ_s scritte prima,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_s(t,x)}{\partial t} = \Delta u_s(t,x) \\ u_s(0,x) = \frac{1}{\pi^2}\psi_s(x) \end{cases}, \tag{8}$$

e poi passiamo al limite per $s \to 0^+$. Infatti per ogni $s > 0, \varphi \in \mathscr{C}^\infty(SU(2) \times \mathbb{R}_+)$ vale

$$\begin{aligned} 0 = \langle \partial_t u_s - \Delta u_s, \varphi \rangle &= \int_{SU(2)} \varphi \cdot (\partial_t u_s - \Delta u_s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &= \int_G (-\partial_t \varphi - \Delta \varphi) \cdot u_s\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \xrightarrow{s \to 0^+} \langle -\partial_t \varphi - \Delta \varphi, u \rangle \end{aligned}$$

per il teorema di convergenza di Vitali [Rud87, pag. 133]. Ricordiamo che la definizione di u è

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{s \to 0^+} \langle u_s, \varphi \rangle.$$

Le zonali $Y_{k,0}$ sono autofunzioni dell'operatore di Laplace su $SU(2)$, con equazione agli autovalori, come visto in precedenza,

$$\Delta Y_{k,0} = -k(k+2) Y_{k,0}, \tag{9}$$

e, come già detto, sono una base per le funzioni di $SU(2)$ simmetriche rispetto alle rotazioni attorno all'asse passante per il punto $(\theta, \phi, \eta) = (0,0,0)$. Si trova allora, per il teorema di passaggio al limite per serie assolutamente convergenti, che una soluzione del Problema di Cauchy (8) è la seguente:

$$u_s(t,\theta) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(k+2)t} c_{k,0}^{(s)} Y_{k,0}(\theta),$$

dove i $c_{k,0}^{(s)}$ sono i coefficienti dello sviluppo (6). Infatti:

$$u_s(0,\theta) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k,0}^{(s)} Y_{k,0}(\theta) = \frac{1}{\pi^2} \psi_s(\theta), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_s(t,\theta)}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} [-k(k+2)] \mathrm{e}^{-k(k+2)t} c_{k,0}^{(s)} Y_{k,0}(\theta), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\Delta u_s(t,\theta) &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(k+2)t} c_{k,0}^{(s)} \Delta Y_{k,0}(\theta) \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(k+2)t} c_{k,0}^{(s)} [-k(k+2)] Y_{k,0}(\theta).\end{aligned} \tag{12}$$

La (10) verifica la condizione al contorno del Problema di Cauchy (8), mentre l'equazione differenziale è verificata dall'uguaglianza delle espressioni (11) e (12). Vogliamo quindi ora passare al limite di $s \to 0^+$. A tal fine osserviamo che, poiché $Y_{k,0}(\theta) \in \mathscr{C}^\infty(SU(2))$, vale che

$$c_{k,0}^{(s)} = \langle Y_{k,0}, \psi_s \rangle_{L^2(SU(2))} \xrightarrow{s\to 0^+} \pi^2 Y_{k,0}(0)$$

(come prima, per il teorema di convergenza di Vitali). Si deve allora calcolare

$$\begin{aligned}Y_{k,0}(0) &= C(k)\, P_k^{\left(\frac12,\frac12\right)}(\cos(0)) \\ &= C(k)\, P_k^{\left(\frac12,\frac12\right)}(1) \\ &= C(k)\, \frac{1}{2^k}\binom{k+\frac12}{k}\binom{k+\frac12}{0} 2^k \\ &= C(k)\, \frac{\Gamma\left(k+\frac32\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac32\right)} \frac{\Gamma\left(k+\frac32\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(k+\frac32\right)} \\ &= (k+1)\frac{\Gamma\left(\frac32\right)(k+1)!}{\Gamma\left(k+\frac32\right)} \frac{\Gamma\left(k+\frac32\right)}{(k+1)!\,\Gamma\left(\frac32\right)} = k+1.\end{aligned}$$

I coefficienti dello sviluppo di Fourier della soluzione del Problema di Cauchy (7) sono allora

$$c_{k,0} = \lim_{s\to 0^+} c_{k,0}^{(s)} = \pi^2 Y_{k,0}(0) = \pi^2(k+1).$$

Possiamo scrivere dunque la soluzione dell'equazione del calore su $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ con dato iniziale la delta di Dirac centrata nell'estremo identificato da $(\theta,\phi,\eta) = (0,0,0)$:

$$\begin{aligned}u(t,\theta) = \lim_{s\to 0^+} u_s(t,\theta) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k,0} Y_{k,0}(\theta) \mathrm{e}^{-k(k+2)t} \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \pi^2(k+1) Y_{k,0}(\theta)\mathrm{e}^{-k(k+2)t} \\ &= \Gamma\left(\frac32\right) \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^2 \frac{(k+1)!}{\Gamma\left(k+\frac32\right)} P_k^{\left(\frac12,\frac12\right)}(\cos(\theta))\, \mathrm{e}^{-k(k+2)t}.\end{aligned}$$

Osserviamo che il problema è invariante per rotazioni (in $\mathbb{R}^4$), quindi da questo caso si può ottenere facilmente la soluzione del problema con dato iniziale una delta di Dirac centrata in un punto qualsiasi: basta difatti ruotare il dato iniziale di modo che coincida con il caso appena risolto, seguire quanto fatto qui ed applicare infine la rotazione inversa. In effetti, questa procedura è equivalente a scegliere un sistema di riferimento ruotato sulla sfera $\mathbb{S}^3$, in cui risolvo il problema, e poi riportare la soluzione nelle coordinate iniziali.

Riferimenti bibliografici

[Far08] Jacques Faraut. *Analysis on Lie Groups: An introduction.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1st edition, 2008.

[Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* PAM. Wiley, 2 edition, 1999.

[Hal15] Brian Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction.* Graduate texts in mathematics 222. Springer, 2nd edition, 2015.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.

[SW71] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* PMS-32. Princeton University Press, 1971.

[Sze39] Gabor Szego. *Orthogonal polynomials.* Colloquium Publications. American Mathematical Society, 4th edition, 1939.